

LUIGI CAMPEDELLI

PROF. ORDINARIO NELL'UNIVERSITÀ DI FIRENZE

LEZIONI DI GEOMETRIA

VOLUME SECONDO

PARTI SECONDA: LE CURVE E LE SUPERFICIE

QUINTA EDIZIONE



CASA EDITRICE DOTT. ANTONIO MILANI

1970

I N D I C E

PREFAZIONE.	pag. V
---------------------	--------

CAPITOLO PRIMO LE CURVE PIANE

1. - LE CURVE ALGEBRICHE	pag. 3
1) L'equazione ordinaria di una curva algebrica. — 2) Altre espressioni dell'equazione ordinaria. — 3) L'equazione esplicita. — 4) Sui punti di una curva algebrica. — 5) Richiami di alcune nozioni. — 6) A proposito dell'equazione omogenea.	
2. - LE CURVE TRASCENDENTI	10
1) La loro equazione. — 2) La rappresentazione approssimata. — 3) Il confronto con il caso algebrico. — 4) I punti singolari. — 5) L'equazione esplicita. — 6) Le proprietà « differenziali » e le proprietà « in grande ». — 7) Gli scopi e i caratteri della trattazione.	
3. - IL METODO DELLE APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE PER LA FUNZIONE IMPLICITA	15
1) L'approssimazione della $y=y(x)$. — 2) Il caso dell'equazione $y=f(x,y)$. — 3) Il caso generale. — 4) Un'applicazione. — 5) Il confronto con lo sviluppo del Taylor. — 6) Un esempio. — 7) Un'applicazione alla parabola nodata. — 8) La lunaca del Pascal. — 9) La foglia del Descartes.	
4. - SULLA RAPPRESENTAZIONE PARAMETRICA DELLE CURVE PIANE	25
1) Le equazioni parametriche. — 2) La rappresentazione parametrica generale in rapporto alle singolarità della curva. — 3) Le equazioni parametriche implicite.	
5. - LE TANGENTI AD UNA CURVA PIANA	27
1) L'equazione della tangente. — 2) Altra forma dell'equazione della tangente. — 3) L'equazione della tangente in rapporto alla rappresentazione parametrica della curva. — 4) Il caso delle curve algebriche. — 5) La classe di una curva algebrica. — 6) La tangente come limite di una corda variabile. — 7) Il linguaggio infinitesimale intuitivo. — 8) I punti angolari. Un esempio. — 9) Un altro esempio.	

1) I punti con la tangente stazionaria. — 2) I flessi. — 3) I flessi in rapporto alla rappresentazione esplicita della curva. — 4) Il comportamento della curva rispetto ad una sua tangente stazionaria. — 5) I flessi di una curva algebrica e la sua Hessiana. — 6) I flessi della sinusoide. — 7) Il flesso della parabola cubica. — 8) Il flesso della parabola semicubica. — 9) Il comportamento di una curva algebrica rispetto alla tangente in un suo punto semplice improprio. — 10) I flessi di una curva razionale. — 11) I flessi della versiera. — 12) La sostituzione di una curva con un'altra agli effetti del computo delle intersezioni con una retta in un suo punto. — 13) Un'osservazione.

1) Il contatto di due curve in un loro punto semplice comune. — 2) Nota. — 3) Il mutuo comportamento di due curve in un loro punto comune. — 4) Il contatto di una curva con altra che l'approssima in un punto. — 5) Un altro caso. — 6) Il principio della transitività dei contatti. — 7) Sulla possibilità di sostituire una curva con altra che l'approssimi. — 8) Le condizioni imposte da un contatto assegnato.

1) I sistemi lineari di curve piane. — 2) Le curve osculatrici ad una curva data. — 3) L'iperosculazione. — 4) Il comportamento delle curve di un fascio rispetto ad una curva passante per un punto base. — 5) Sopra i punti d'iperosculazione. — 6) La curva osculatrice come limite di quella variabile nel suo sistema lineare. — 7) Altra determinazione del limite. — 8) L'osculazione in un punto base del sistema lineare. — 9) La successione delle curve osculatrici in un punto semplice. Il ramo lineare. — 10) Le parabole osculatrici e lo sviluppo dell'equazione esplicita. — 11) Un esempio. — 12) L'osculazione attraverso lo sviluppo dell'equazione implicita. — 13) Sul concetto intuitivo di curva piana. — 14) L'osculazione interpretata con il linguaggio infinitesimale intuitivo.

1) Le definizioni e le circostanze analitiche che caratterizzano i punti multipli. — 2) Le rette tangenti in un punto multiplo. — 3) Altro modo di conseguire i risultati precedenti. — 4) Il caso algebrico. — 5) Le tangenti in un punto multiplo come limiti di corde e della tangente in un punto semplice. — 6) Sulle intersezioni di due curve in un punto multiplo. — 7) L'estensione del principio della transitività dei contatti. — 8) Un'ulteriore precisazione. — 9) Sul comportamento di due curve in un loro punto multiplo comune. — 10) Le condizioni imposte da particolari contatti. — 11) Le curve osculatrici ad una data in un suo punto multiplo, i rami lineari. — 12) Il caso delle tangenti multiple. — 13) Ancora un'estensione del principio della transitività dei contatti.

1) Il nodo e il punto doppio isolato. — 2) Gli esempi. — 3) Il nodo con le tangenti sovrapposte agli assi coordinati. — 4) La cuspidi di prima specie. — 5) Il tacnode. — 6) La cuspidi di seconda specie. — 7) L'oscnode e la cuspidi di terza specie. I nodi e le cuspidi di specie superiore. — 8) La genesi del tacnode e dell'oscnode come limiti di nodi. — 9) Un esempio. — 10) Altro esempio. — 11) Sulle singolarità della curva generica del fascio individuato da due curve date. — 12) Un esempio. — 13) Un secondo esempio. — 14) Altro esempio. — 15) Ancora un esempio. — 16) La curva del tipo parabolico fratto. — 17) L'approssimazione di un ramo cuspidale con parabole del tipo fratto. — 18) Il caso della cuspidi di seconda specie. — 19) Per le curve trascendenti. — 20) Sull'esame di un punto di molteplicità maggiore di due. — 21) I punti multipli di una curva studiati attraverso le sue equazioni parametriche. — 22) I punti multipli della cicloidi. — 23) Un'osservazione critica. — 24) Il caso delle curve razionali. — 25) Un esempio. — 26) Le intersezioni assorbite da un punto multiplo comune a due curve. — 27) Il caso del punto di molteplicità più elevata. — 28) La costituzione delle singolarità illustrata con il linguaggio infinitesimale intuitivo: i nodi. — 29) Il caso delle cuspidi. — 30) I successivi interni di un punto nel piano.

11. - LE INTERSEZIONI DI UNA CURVA ALGEBRICA CON UNA RETTA

» 120

1) Le intersezioni della curva con la congiungente due punti dati. — 2) La tangente in un punto. — 3) I punti multipli. — 4) Le tangenti in un punto multiplo. — 5) L'equazione di una curva passante più volte per un vertice del triangolo di riferimento. — 6) I punti multipli nell'origine e all'infinito sugli assi coordinati. — 7) Alcuni esempi. — 8) Le condizioni per l'esistenza dei punti multipli. — 9) La polarità determinata dalla curva. — 10) La polare prima. — 11) La prima formula del Plücker. — 12) Le tangenti condotte alla curva da un suo punto. — 13) Il teorema del Salmon per le cubiche ellittiche. — 14) Le bitangenti e le tangenti di flesso. — 15) Sopra gli allineamenti di particolari punti in una cubica piana. — 16) Altra dimostrazione del teorema del Salmon. — 17) Gli allineamenti dei flessi di una cubica. — 18) Le coniche polari degeneri e l'hessiana della curva. — 19) Sull'hessiana di una cubica. — 20) Il comportamento dell'hessiana nei nodi e nelle cuspidi della curva. Il numero dei flessi.

12. - GLI ASINTOTI

» 127

1) Gli asintoti di una curva algebrica. — 2) Gli asintoti provenienti dai punti multipli impropri. — 3) Gli asintoti dalla versiera dell'Agnesi. — 4) L'asintoto della cissoide di Diocle. — 5) La conoide di Niomedes. — 6) L'asintoto della foglia di Cartesio. — 7) Gli asintoti di una particolare cubica nodata. — 8) Altre applicazioni. — 9) Le proprietà caratteristiche degli asintoti di una curva algebrica. — 10) Una definizione degli asintoti delle curve trascendenti. — 11) La caratterizzazione degli asintoti. — 12) Il comportamento del punto di contatto. — 13) Le condizioni necessarie. — 14) La condizione di sufficienza. — 15) Un esempio. — 16) Gli asintoti paralleli ad uno degli

assi coordinati. — 17) Altro criterio per la caratterizzazione degli asintoti paralleli ad uno degli assi coordinati. — 18) L'asintoto della trattrice. — 19) L'asintoto della curva delle probabilità. — 20) Un'osservazione. — 21) Gli asintoti della quadratrice. — 22) Il caso algebrico. — 23) Un esempio. — 24) Ancora sugli asintoti della foglia di Cartesio. — 25) Altra definizione degli asintoti delle curve trascendenti.

13. - GLI INVILUPPI ALGEBRICI pag. 132

1) La definizione. — 2) L'inviluppo aderente ad una curva luogo. — 3) I punti di contatto e le rette semplici e multiple di un inviluppo. — 4) La curva luogo aderente ad un inviluppo. — 5) La seconda formula del Plücker. — 6) Le singolarità dell'inviluppo aderente ad una curva luogo priva di punti multipli. — 7) La terza formula del Plücker.

14. - LA GENERAZIONE PROIETTIVA DELLE CURVE PIANE ALGEBRICHE 136

1) Le corrispondenze (m, n) . Il principio dello Chasles. — 2) Le totalità razionali semplicemente infinite. — 3) La curva generata da una proiettività fra un fascio di rette e uno di curve. — 4) La proprietà inversa. — 5) La generazione di una curva mediante due fasci proiettivi, l'uno di coniche e l'altro di curve d'ordine qualsiasi. — 6) Il caso generale. — 7) Il fascio di proiettività. — 8) La trilinearità. — 9) La trilinearità fra forme sovrapposte. — 10) La determinazione di una trilinearità. — 11) Le cubiche generate mediante fasci di rette riferiti in una trilinearità. — 12) La plurilinearità. — 13) La tetrilinearità fra fasci di rette. — 14) La generazione delle quartiche mediante fasci di rette riferiti in una tetrilinearità. — 15) Le curve dell'ordine n generate con n -linearità. — 16) La costruzione degli inviluppi algebrici.

CAPITOLO SECONDO

LE TRASFORMAZIONI QUADRATICHE E L'ANALISI DEI PUNTI MULTIPLI DELLE CURVE PIANE ALGEBRICHE

1. - LE TRASFORMAZIONI QUADRATICHE FRA PIANI 173

1) La definizione. Le corrispondenze biunivoche algebriche. Le reti omaloidee fondamentali della trasformazione quadratica. I punti fondamentali. — 2) Le eccezioni alla biunivocità della corrispondenza. — 3) I punti base delle reti omaloidee come punti eccezionali. — 4) La « dilatazione » dell'interno di un punto fondamentale. — 5) Le trasformazioni cremoniane. Le corrispondenze algebriche biunivoche senza eccezioni. — 6) Le corrispondenze cremoniane come prodotti di trasformazioni quadratiche.

2. - LA PROIETTIVITÀ ASSOCIATA AD UNA TRASFORMAZIONE DEL SECONDO ORDINE 179

1) I sistemi lineari di curve riguardati come spazi lineari. — 2) La proiettività che subordina la trasformazione quadratica. — 3) L'uguale composizione delle due terne di punti fondamentali. — 4) I diversi modi di determinare una trasformazione quadratica: il primo caso. —

5) Il secondo caso. — 6) Il terzo caso. — 7) Osservazione: il caso della trasformazione cremoniana d'ordine n . — 8) Le equazioni ridotte della trasformazione quadratica. — 9) L'identità proiettiva delle trasformazioni quadratiche.

3. - LA COSTRUZIONE DELLA TRASFORMAZIONE QUADRATICA pag. 187

1) La costruzione della trasformazione quadratica mediante fasci proiettivi di raggi. — 2) La deduzione dei criteri per individuare la trasformazione quadratica. — 3) Le trasformazioni quadratiche fra piani sovrapposti: il caso generale. — 4) Il caso in cui esiste una conica formata di punti uniti. — 5) Il caso in cui esiste una retta di punti uniti. — 6) La trasformazione quadratica che nasce mediante la proiezione sghemba. — 7) Un'osservazione. — 8) Sulla costruzione per proiezione sghemba della più generale trasformazione quadratica. — 9) Un caso particolare di proiezione sghemba. — 10) La trasformazione quadratica costruita con la doppia proiezione stereografica di una quadrica. — 11) Il caso dei piani sovrapposti.

4. - TIPI PARTICOLARI DI TRASFORMAZIONI QUADRATICHE » 187

1) Ancora sulle trasformazioni quadratiche con una conica di punti uniti. — 2) Le tangenti a due curve omologhe. — 3) L'inversione rispetto ad una conica e ad un punto. — 4) L'inversione rispetto ad una conica e al suo centro. — 5) L'inversione rispetto al cerchio. — 6) Le tangenti a due curve omologhe in una inversione circolare. — 7) L'inversione circolare come trasformazione conforme inversa. — 8) Le equazioni dell'inversione circolare. — 9) L'inversione rispetto ad una conica e ad un punto sopra di essa. — 10) Le trasformazioni quadratiche con due rette di punti uniti. — 11) Il caso involutorio. — 12) L'iperbolicismo generalizzato. — 13) L'iperbolicismo del Newton. — 14) I punti fondamentali nelle trasformazioni quadratiche involutorie. — 15) La trasformazione quadratica involutoria del Poncelet. — 16) Un caso limite. — 17) La costruzione della trasformazione del Poncelet mediante un fascio di coniche.

5. - LA TRASFORMAZIONE DI UNA CURVA ALGEBRICA » 207

1) L'ordine della curva trasformata. — 2) Le molteplicità della curva trasformata nei punti fondamentali. — 3) Le intersezioni della curva trasformata con le rette fondamentali. — 4) La linceolata del Barrois. — 5) La lumaca del Pascal. — 6) La versiera dell'Agnesi, la pseudoversiera del Leibniz e il serpentino.

6. - LO SCIoglimento DELLE SINGOLARITÀ » 213

1) Il caso del nodo ordinario. — 2) La cuspidale di prima specie. — 3) I nodi e le cuspidi di specie superiore. — 4) L'analisi di una qualsiasi singolarità. — 5) Necessità di una precisazione. — 6) Le intersezioni di due curve asserbite da un loro punto multiplo comune. — 7) Il processo di scioglimento di una singolarità ha necessariamente termine. — 8) L'invarianza della compesizione di una singolarità rispetto alle trasformazioni quadratiche. — 9) L'indipendenza della struttura di una singolarità dalle trasformazioni che servono ad analizzarla.

— 10) La trasformazione di una curva in altra dotata di soli punti multipli ordinari. — 11) Un'osservazione critica.

7. - IL GENERE DELLE CURVE ALGEBRICHE PIANE pag. 227

1) La definizione. — 2) Alcuni casi particolari. — 3) Il genere di una curva e della sua trasformato birazionale con soli punti multipli ordinari. — 4) L'invarianza del genere rispetto alle trasformazioni birazionali. — 5) La formula dello Zeuthen. — 6) Il genere di una curva e quello dell'involuppo aderente. La terza formula del Plücker. — 7) Il genere di una curva riducibile. — 8) Il valore minimo del genere di una curva irriducibile. — 9) Il massimo numero dei punti doppi di una curva piana irriducibile. — 10) La seconda relazione aritmetica fondamentale per le trasformazioni cremoniane. — 11) A proposito dello scioglimento delle singolarità.

8. - LE CURVE PIANE RAZIONALI » 237

1) L'algebricità e l'irriducibilità delle curve razionali. — 2) La caratterizzazione delle curve razionali mediante il valore del genere ($\mu=0$). — 3) La ricerca dei punti doppi delle curve razionali. — 4) Il teorema del Lüroth. — 5) La rappresentazione parametrica delle curve razionali. — 6) Le involuzioni razionali sopra una retta. — 7) Un'applicazione. — 8) Alcuni esempi.

CAPITOLO TERZO

LE SUPERFICIE

1. - IL PIANO TANGENTE AD UNA SUPERFICIE » 251

1) Sulla rappresentazione della superficie. — 2) Le equazioni parametriche. — 3) I punti semplici e multipli. — 4) I punti semplici ed il piano tangente in essi. — 5) Un'osservazione. — 6) La sezione della superficie con un piano tangente. — 7) I punti ellittici, parabolici e iperbolici. La linea parabolica. — 8) Il caso delle superficie algebriche. La superficie hessiana. I punti di una quadrica. — 9) Le tangenti principali ad una superficie e il suo comportamento rispetto al piano tangente. — 10) Alcuni piani tangenti particolari. — 11) Il cono circoscritto da un punto. Il caso algebrico. — 12) La classe di una superficie algebrica. — 13) La quadrica osculatrice. — 14) Gli involuppi doppiamente infiniti di piani.

2. - I PUNTI MULTIPLI DELLE SUPERFICIE » 264

1) Le condizioni analitiche che caratterizzano i punti multipli. L'equazione del cono tangente. — 2) Un'osservazione. — 3) Il caso algebrico. — 4) Ulteriori considerazioni sul caso algebrico. — 5) I punti multipli nei vertici del tetraedro di riferimento delle coordinate proiettive. — 6) I punti multipli nell'origine e all'infinito sugli assi cartesiani. — 7) L'esistenza di punti multipli sopra una superficie. — 8) La polarità determinata da una superficie algebrica. — 9) I monoidi. — 10) Le sezioni piane passanti per un punto multiplo della

superficie. — 11) Alcuni esempi. — 12) Le linee multiple di una superficie. — 13) I piani multipli degli involucri doppiamente infiniti.

3. - LE TRASFORMAZIONI QUADRATICHE NELLO SPAZIO pag. 273

1) La generalità. Il sistema omaloideo fondamentale. — 2) Il sistema omaloideo fondamentale della trasformazione inversa. — 3) La proiettività collegata ad una trasformazione quadratica. — 4) Il primo sistema lineare omaloideo di quadriche. — 5) La trasformazione quadratica ω_2 . I suoi elementi fondamentali. — 6) Il comportamento della ω_1 in relazione agli elementi fondamentali. — 7) Le equazioni ridotte della ω_1 . — 8) Le coniche fondamentali riducibili. — 9) Le equazioni della ω'_1 . — 10) La trasformazione ω''_1 . — 11) I sistemi omaloidei triplicemente infiniti di quadriche. — 12) Le tre trasformazioni quadratiche spaziali. — 13) Il confronto dei tre casi. — 14) Il sistema omaloideo di superficie cubiche fondamentale per la ω_2 . — 15) Il sistema omaloideo di superficie del quarto ordine fondamentale per la ω_2 .

4. - L'ANALISI DELLE SINGOLARITÀ DI UNA SUPERFICIE » 288

1) La corrispondente di una superficie data in una trasformazione quadratica. — 2) Lo « scioglimento » dell'intersezione del primo ordine di un punto multiplo di una superficie. — 3) I punti multipli infinitamente vicini. — 4) Il punto doppio conico. — 5) Il punto doppio biplanare. — 6) Il punto doppio uniplanare. — 7) Il punto doppio tacnodale. — 8) Sul concetto della composizione di una singolarità. — 9) Sul comportamento della superficie polare prima.

5. - LE RETTE DOPPIE DI UNA SUPERFICIE » 293

1) La curva multipla di una superficie. — 2) La retta doppia. — 3) I punti cuspidali. — 4) Le superficie che passano doppiamente per uno degli assi coordinati. — 5) La superficie cubica rigata. — 6) La superficie romana dello Steiner. — 7) La retta s-pla. — 8) I punti di una curva multipla.

6. - L'ANALISI DEI PUNTI CUSPIDALI DELLA RETTA DOPPIA NODALE . . . » 302

1) I punti doppi infinitamente vicini a quelli cuspidali. — 2) La determinazione dei punti cuspidali attraverso una trasformazione quadratica. — 3) Le coppie dei punti cuspidali infinitamente vicini. — 4) La retta doppia nodale con un piano tangente fisso. — 5) Ulteriore esame del punto tacnodale isolato.

CAPITOLO QUARTO

LE CURVE GOBBE

1. - LA RAPPRESENTAZIONE ANALITICA DELLE CURVE GOBBE » 309

1) Le equazioni parametriche. — 2) La curva intersezione completa di due superficie. — 3) Le curve algebriche gobbe. — 4) Sopra i coni proiettanti una curva gobba. — 5) I coni proiettanti una curva algebrica. — 6) La rappresentazione parametrica delle curve algebriche

gobbe. — 7) Le curve algebriche gobbe come trasformate birazionali di quelle piane. — 8) Il genere delle curve gobbe algebriche. — 9) La rappresentazione monoidale. — 10) Le intersezioni di una curva algebrica con una superficie algebrica. — 11) Le curve gobbe razionali. — 12) La cubica gobba. — 13) Le quadriche passanti per una cubica gobba. — 14) La generazione della cubica gobba mediante fasci proiettivi di piani. — 15) La generazione delle cubiche gobbe mediante stelle omografiche. — 16) Le quartiche gobbe della prima specie. — 17) Le quartiche gobbe della seconda specie.

2. - LE SEZIONI PIANE DI UNA CURVA GOBBA pag. 323

1) I punti semplici e multipli. — 2) I piani tangenti e la retta tangente. — 3) Il piano osculatore. — 4) I punti di flesso e i punti di ipersecuzione. — 5) Le tangenti alla curva intersezione completa di due superficie. — 6) La tangente come limite di una corda. — 7) Il piano osculatore come limite del piano determinato da tre punti della curva. — 8) Il nodo. — 9) La cuspid. — 10) L'intersezione di due superficie che si toccano in un punto. — 11) Sulle intersezioni di una curva con una superficie. — 12) Le eliche cilindriche circolari. — 13) Ulteriori proprietà dell'elica cilindrica. — 14) Gli involuppi semplicemente infiniti di piani.

3. - LA PROIEZIONE DI UNA CURVA GOBBA » 334

1) La proiezione piana di una curva gobba: le immagini dei punti multipli. — 2) I punti doppi della proiezione. — 3) Le cuspidi. — 4) I flessi. — 5) Il caso algebrico: i punti doppi apparenti di una curva gobba algebrica. — 6) Sulle trisecanti delle curve algebriche. — 7) La proiezione piana della cubica gobba. — 8) Le proiezioni delle quartiche gobbe. — 9) I due tipi di quartiche gobbe. — 10) Alcune proiezioni piane dell'elica cilindrica circolare.

4. - L'ANALISI DELLE SINGOLARITÀ DELLE CURVE GOBBE ALGEBRICHE . . . » 342

1) La trasformazione di una curva gobba mediante una corrispondenza quadratica ω_1 . — 2) Il punto multiplo ordinario determinato dalla ω_1 . — 3) Lo scoglimento di un punto multiplo. — 4) Il caso dei punti doppi. — 5) Le intersezioni di una curva con una superficie. — 6) L'indipendenza delle singolarità di una curva gobba e di una superficie dalle trasformazioni quadratiche che ne consentono l'analisi. — 7) Le singolarità della proiezione piana di una curva gobba. — 8) Il numero dei punti multipli infinitamente vicini ad un altro sopra una curva. — 9) Sulla successione degli intorno di un punto singolare isolato di una superficie. — 10) La trasformazione di una curva gobba in altra con soli punti multipli ordinari. — 11) La trasformazione di una curva gobba in altra priva di punti multipli. — 12) La trasformazione di una curva piana in altra dotata di soli nodi.

CAPITOLO QUINTO

LE SUPERFICIE RIGATE

1. - I PIANI TANGENTI ALLE SUPERFICIE RIGATE pag. 355

1) Le equazioni parametriche di una superficie rigata. — 2) Le rigate gobbe e le rigate sviluppabili. — 3) La discriminazione analitica dei due tipi di superficie rigate. — 4) Le generatrici infinitamente vicine aghembe e complanari. — 5) Le generatrici infinitamente vicine sopra una quadrica. — 6) La quadrica di raccordo lungo una generatrice. — 7) La quadrica osculatrice.

2. - LE RIGATE SVILUPPABILI » 361

1) La sviluppabile circoscritta ad una curva gobba. — 2) I tre tipi di superficie sviluppabili. — 3) Il piano di due generatrici infinitamente vicine. — 4) L'applicabilità sul piano delle superficie sviluppabili. — 5) Le curve tracciate sopra una sviluppabile. — 6) Lo spigolo di regresso. — 7) La sezione con un piano per una generatrice. — 8) La sezione con un piano tangente. — 9) La curva doppia nodale della superficie. — 10) L'elicoide sviluppabile. — 11) Il « rango » di una sviluppabile algebrica e del suo spigolo di regresso. — 12) Le rigate come superficie a punti parabolici.

3. - LE RIGATE SCHEMME » 372

1) Il teorema dello Chasles. — 2) Il caso delle generatrici singolari. — 3) Il teorema dell'Hachette. — 4) Il piano asintotico e il piano centrale. — 5) Il paraboloido delle normali. — 6) La linea di stringimento. — 7) La linea doppia nel caso algebrico. — 8) La direttrice doppia della rigata cubica aghemba. — 9) Il grado delle rigate algebriche.

4. - LA COSTRUZIONE DELLE RIGATE ALGEBRICHE » 378

1) La rigata avente tre direttrici assegnate. — 2) Il grado della rigata. — 3) La molteplicità delle direttrici. — 4) Il caso di una direttrice rettilinea. — 5) Le 27 rette di una superficie cubica. — 6) Le coppie di rette aghembe sopra una superficie cubica. — 7) Le rigate a piano direttore e i conoidi. — 8) La rigata cubica gobba. — 9) Il conoide retto del Plücker. — 10) La generalizzazione proiettiva del cono-coneo del Wallis. — 11) Il cono-coneo del Wallis. — 12) La superficie della volta a sbieco. — 13) La rigata circoscritta ad una superficie. — 14) Il conoide retto circoscritto ad una sfera e la sua generalizzazione proiettiva. — 15) La rigata delle bisecanti di una curva incidenti ad un'altra. — 16) Le generatrici doppie di una rigata. — 17) La rigata relativa ad una corrispondenza fra due curve. — 18) Un esempio. — 19) La costruzione di rigate mediante fasci o involucri di piani.

CAPITOLO SESTO

LE SUPERFICIE RAZIONALI

1. - LA RAPPRESENTAZIONE PIANA DELLE SUPERFICIE RAZIONALI pag. 393

1) La definizione. — 2) Il sistema fondamentale della rappresentazione. — 3) La proiezione fra il sistema fondamentale e quello delle sezioni piane. — 4) Gli elementi eccezionali della rappresentazione. — 5) Le coppie di punti base del sistema fondamentale, semplici e fra loro infinitamente vicini. — 6) I punti multipli della superficie nella sua rappresentazione piana. — 7) Il passaggio da una ad altra rappresentazione. — 8) La razionalità delle involuzioni piane. — 9) La proiezione stereografica della quadrica. — 10) Le intersezioni di una quadrica con altra superficie. I due tipi di quartiche gobbe. — 11) Un esempio di involuzione piana del secondo ordine. — 12) La rappresentazione piana del monoido cubico. — 13) La rappresentazione piana della superficie cubica non rigata. — 14) La rappresentazione piana della rigata cubica. — 15) I coni cubici. — 16) La rappresentazione piana della superficie romana dello Steiner. — 17) Le rigate razionali e i teoremi generali sulle superficie razionali. — 18) Sulla rappresentazione piana delle rigate razionali.

2. - LA COSTRUZIONE DELLE SUPERFICIE RAZIONALI MEDIANTE SISTEMI LINEARI DI CURVE PIANE * 410

1) I sistemi lineari triplamente infiniti di curve nel piano come rappresentativi delle sezioni piane di una superficie razionale. — 2) Le equazioni parametriche della superficie. — 3) Un'osservazione. — 4) Il sistema lineare di coniche avente la dimensione tre ed il grado quattro. — 5) Una digressione sulle coniche coniugate e sulle coniche degeneri di un sistema lineare. — 6) La superficie romana dello Steiner ricostruita attraverso la sua rappresentazione piana. — 7) La superficie rappresentata da un sistema di coniche avente la dimensione ed il grado uguali a tre. — 8) Le superficie provenienti dai sistemi di cubiche con sei punti base semplici. — 9) La presenza di un punto doppio. — 10) La trasformazione birazionale di una curva piana in altra con soli nodi. — 11) Alcune notizie sopra i piani multipli. — 12) Il piano doppio che proviene dalla superficie cubica generale. — 13) La ricerca delle rette sulla superficie cubica. — 14) Dei piani doppi.

L'INDICE DEGLI ARGOMENTI PRINCIPALI * 421