Franco Flandoli

Introduzione all'analisi matematica

McGraw-Hill Libri Italia srl

Milano • New York • St. Louis • San Francisco • Auckland • Bogotá
Caracas • Lisboa • London • Madrid • Mexico City • Montreal
New Delhi • San Juan • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

Indice

Prefazione		**xi**
Parte I	**Calcolo differenziale e infinitesimale**	**1**
Capitolo 1	**Infinitesimi**	**3**
1.1	Introduzione	3
	1.1.1 Proviamo a creare un modello matematico	3
	1.1.2 Alcuni scopi dell'analisi infinitesimale	5
	1.1.3 Numeri infinitesimi o funzioni infinitesime?	6
	1.1.4 Costruiamo una definizione	7
1.2	Considerazioni preliminari: le funzioni infinitesime per $x \to +\infty$	9
	1.2.1 Definizione	9
	1.2.2 Come verificare la proprietà di infinitesimo	10
	1.2.3 Osservazioni sulla definizione di infinitesimo	12
1.3	Funzioni infinitesime per $x \to x_0$	15
	1.3.1 Funzioni di una variabile	15
	1.3.2 Funzioni di più variabili	17
1.4	Operazioni sugli infinitesimi	19
1.5	Diversi ordini di infinitesimo	22
Capitolo 2	**Stabilità rispetto alle piccole variazioni**	**25**
2.1	Introduzione	25
2.2	Definizioni di dipendenza continua	26
2.3	Operazioni sulle funzioni continue	31
	2.3.1 Altri esempi	34
2.4	Linguaggio topologico e generalizzazioni	37
	2.4.1 Distanze e spazi metrici	37
	2.4.2 Linguaggio degli intorni	39
	2.4.3 Continuità della composizione	41
	2.4.4 Aperti, chiusi, e frontiera di un insieme	42
	2.4.5 Teoremi locali sulle funzioni continue	43

2.5	La nozione di limite	46
	2.5.1 Infinitesimi dello stesso ordine	47
Capitolo 3	**Calcolo delle piccole variazioni**	**49**
3.1	Derivate e derivate parziali	49
	3.1.1 Derivate parziali	52
	3.1.2 Retta tangente e rette secanti	53
3.2	Alcune regole del calcolo differenziale	55
	3.2.1 Derivate delle funzioni elementari	60
	3.2.2 Derivate laterali	62
	3.2.3 Derivate successive	64
3.3	Variazioni finite: il teorema di Lagrange	66
	3.3.1 Teorema di Cauchy	70
3.4	Regola di L'Hôpital	71
Capitolo 4	**Approssimazione locale**	**75**
4.1	Approssimazione lineare	75
	4.1.1 Introduzione	75
	4.1.2 Funzioni lineari	76
	4.1.3 Approssimazione con funzioni lineari	80
	4.1.4 Definizione di differenziale	81
	4.1.5 Differenziale e derivate parziali	85
	4.1.6 Differenziabilità e continuità	89
	4.1.7 Differenziale della funzione composta	90
4.2	La formula di Taylor	93
	4.2.1 Formula di Taylor per funzioni di una variabile	93
	4.2.2 Formula di Taylor col resto di Lagrange	100
4.3	Formula di Taylor in più variabili	102
Capitolo 5	**Problemi asintotici**	**107**
5.1	Equivalenza asintotica	107
	5.1.1 Funzioni asintoticamente equivalenti	107
	5.1.2 Principio di sostituzione	110
5.2	Approssimazioni asintotiche per $x \to 0$	115
	5.2.1 Alcune proprietà dei simboli di Landau	115
	5.2.2 Relazioni approssimate tra variabili	117
5.3	Approssimazioni asintotiche all'infinito	121
	5.3.1 Esempi di sostituzione per limiti all'infinito	121
	5.3.2 Errore relativo ed errore assoluto	122
	5.3.3 Asintoti obliqui	124
	5.3.4 Esempi di approssimazione non lineare all'infinito	125
5.4	Soluzioni approssimate di equazioni	129
Capitolo 6	**Derivate e proprietà estremali**	**135**
6.1	Introduzione	135

6.2	Condizioni necessarie di estremo libero	136
6.3	Condizioni sufficienti	139
	6.3.1 Monotonia di funzioni di una variabile	140
	6.3.2 Condizioni sufficienti in dimensione qualsiasi	143
6.4	Massimi e minimi vincolati	150
6.5	Convessità	159
	6.5.1 Convessità in dimensione uno	159
	6.5.2 Convessità in dimensione qualsiasi	164
Parte II	**Teoremi di esistenza**	**165**
Capitolo 7	**Completezza dell'insieme dei numeri reali**	**167**
7.1	Introduzione	167
7.2	Principio degli intervalli incapsulati	167
7.3	Principio dell'estremo superiore	169
	7.3.1 Estremo superiore e successioni (o funzioni) monotone	172
7.4	Completezza in spazi metrici	173
	7.4.1 Spazi metrici completi	173
Capitolo 8	**Zeri, equazioni e funzioni inverse**	**177**
8.1	Teorema di esistenza degli zeri	177
	8.1.1 Il caso multidimensionale	181
8.2	Equazioni e teorema dei valori intermedi	183
8.3	Funzione inversa	187
	8.3.1 Esempi importanti di funzioni inverse	190
	8.3.2 Inverse di funzioni in più variabili	194
	8.3.3 Funzioni definite implicitamente	196
Capitolo 9	**Funzioni continue sui compatti**	**199**
9.1	Un teorema sulle successioni limitate	199
	9.1.1 Insiemi compatti	201
9.2	Il teorema di Weierstrass	202
	9.2.1 I teoremi di Rolle e di Lagrange	205
9.3	Continuità uniforme	207
Parte III	**Calcolo integrale, equazioni differenziali e serie**	**211**
Capitolo 10	**Misura, integrazione e probabilità**	**213**
10.1	Introduzione	213
	10.1.1 Uno dei punti di arrivo	213
10.2	Teoria generale	217
	10.2.1 Algebra degli insiemi misurabili	217
	10.2.2 Misure	219
	10.2.3 Funzioni semplici e loro integrali	221

	10.2.4 Funzioni integrabili e loro integrali	224
	10.2.5 Continuità e integrabilità	226
10.3	Motivazioni ed esempi	228
	10.3.1 Aree di insiemi del piano	228
	10.3.2 Integrali in due variabili	233
	10.3.3 Misura di insiemi in dimensione qualsiasi e relativi integrali	234
	10.3.4 Probabilità	236
	10.3.5 Misura ed integrale su una curva	239
	10.3.6 Misura di superficie ed integrali superficiali	245
	10.3.7 Flusso attraverso una superficie	249
Capitolo 11	**Il teorema fondamentale**	**251**
11.1	Il legame tra calcolo differenziale e integrale	251
11.2	Integrale indefinito	258
	11.2.1 Primitive elementari	259
11.3	Potenziale di un campo	260
Capitolo 12	**Metodi di integrazione e integrali impropri**	**267**
12.1	Formule di riduzione per gli integrali multipli	267
12.2	Integrazione per parti	273
	12.2.1 Formula per gli integrali semplici	273
	12.2.2 Integrali multipli	276
	12.2.3 Teorema della divergenza	278
	12.2.4 Teorema di Stokes	279
12.3	Integrazione per sostituzione	280
	12.3.1 Formula di sostituzione in più variabili	284
12.4	Integrali impropri	287
	12.4.1 Integrali su insiemi non limitati	287
	12.4.2 Integrali di funzioni non limitate	294
Capitolo 13	**Equazioni differenziali**	**299**
13.1	Generalità	299
13.2	Equazioni del primo ordine	300
	13.2.1 Primitive	300
	13.2.2 Problema di Cauchy	301
	13.2.3 Equazioni lineari del primo ordine	303
	13.2.4 Equazioni non lineari	307
13.3	Esempi di equazioni del secondo ordine	314
	13.3.1 Numero tipico di costanti e problema di Cauchy	314
	13.3.2 Equazioni lineari	315
Capitolo 14	**Serie numeriche e serie di funzioni**	**321**
14.1	Serie numeriche	321
14.2	Serie a termini positivi: criteri di confronto	326

14.3	Serie a termini di segno qualsiasi	332
14.4	Altri criteri per serie a termini positivi	335
14.5	Serie di potenze e serie di Taylor	337
	14.5.1 Serie di funzioni	337
	14.5.2 Serie di Taylor	337
	14.5.3 Serie di potenze	338
	14.5.4 Convergenza delle serie di Taylor	339
14.6	Serie di Fourier	340
	14.6.1 Coefficienti della serie	340
	14.6.2 Interpretazione Hilbertiana	343
	14.6.3 Alcuni teoremi di convergenza	344
Appendice A	**I numeri**	**347**
A.1	Numeri naturali, interi e razionali	347
	A.1.1 Numeri naturali	347
	A.1.2 Numeri interi relativi	348
	A.1.3 Numeri razionali	349
A.2	Numeri reali	356
	A.2.1 Principio di Archimede e proprietà di densità	358
	A.2.2 Valore assoluto	360
A.3	Radici e potenze	361
	A.3.1 Radice n-esima	361
	A.3.2 Equazioni e disequazioni con radici	362
	A.3.3 Potenze frazionarie	364
A.4	Il principio di induzione	365
A.5	I numeri complessi	367
	A.5.1 Introduzione	367
	A.5.2 Scritture dei numeri complessi	369
	A.5.3 Alcune proprietà	371
Appendice B	**Lo spazio R^n**	**375**
B.1	Definizioni	375
B.2	Operazioni in R^n e struttura di spazio vettoriale	377
B.3	Norma e distanza euclidea	377
B.4	Prodotto scalare euclideo	379
Appendice C	**Le funzioni**	**381**
C.1	Definizioni insiemistiche	381
	C.1.1 Prime definizioni	381
	C.1.2 Funzioni e relazioni	384
	C.1.3 Funzioni iniettive e funzione inversa	385
	C.1.4 Funzioni composte	387
C.2	Funzioni reali di una o più variabili reali	388
	C.2.1 Funzioni di una variabile	388
	C.2.2 Monotonia e iniettività	391
	C.2.3 Funzioni di più variabili reali	393

	C.2.4	Esempi di funzioni	394
Appendice D	**Limiti**		**407**
D.1	Definizioni		407
D.2	Proprietà dei limiti		409
	D.2.1	Forme indeterminate	413
D.3	Limiti di successioni		417
D.4	Teorema di L'Hôpital		419
Appendice E	**Complementi**		**425**
E.1	La serie esponenziale		425
	E.1.1	Serie esponenziale	425
	E.1.2	Binomio di Newton e calcolo combinatorio	425
	E.1.3	Proprietà di gruppo. Prodotto di serie	426
	E.1.4	Continuità e derivabilità della serie esponenziale	428
	E.1.5	Altra espressione del numero e	429
E.2	Le funzioni iperboliche		430
	E.2.1	Coseno iperbolico	430
	E.2.2	Seno iperbolico	431
	E.2.3	Tangente iperbolica	433
	E.2.4	Funzioni iperboliche inverse	433
E.3	Integrazione di alcune funzioni razionali, algebriche e trascendenti		435
	E.3.1	Funzioni razionali	435
	E.3.2	Funzioni algebriche	439
	E.3.3	Funzioni trascendenti	441
Indice Analitico			**443**