

ALFIO RAGUSA CLARA SPARACINO

# ESERCIZI DI ALGEBRA

teoria degli insiemi, teoria dei gruppi, teoria degli anelli

RAGUSA-SPARACINO  
ESERCIZI DI ALGEBRA  
ZANICHELLI  
0000116

F

L

ZANICHELLI

# INDICE

Introduzione-Prefazione .....	vii
Terminologia .....	x

## Capitolo I Teoria degli insiemi.

§ 1	Calcolo proposizionale. Tavole di verità. Connettivi logici. Tautologie e contraddizioni. Teoremi. Funzioni proposizionali. Quantificatori universali e loro negazioni .....	1
	Esercizi risolti .....	6
	Esercizi proposti .....	12
§ 2	Insiemi. Sottoinsiemi. Intersezione. Unione. Differenza. Differenza simmetrica. Intersezione ed unione di famiglie di insiemi. Prodotto cartesiano. Insieme delle parti .....	13
	Esercizi risolti .....	15
	Esercizi proposti .....	18
§ 3	Applicazioni. Immagine di una applicazione. Applicazioni iniettive, suriettive e biettive. Composizione di applicazioni. Applicazione inversa. Funzione caratteristica di un sottoinsieme di un insieme .....	19
	Esercizi risolti .....	21
	Esercizi proposti .....	29
§ 4	Insiemi finiti ed infiniti. Potenza di un insieme. Insiemi numerabili. Potenza del continuo .....	31
	Esercizi risolti .....	32
	Esercizi proposti .....	36
§ 5	Relazioni binarie. Proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica e transitiva. Relazioni di equivalenza. Partizioni. Insiemi quozienti. Teorema fondamentale sulle applicazioni .....	37
	Esercizi risolti .....	39
	Esercizi proposti .....	47

§ 6	Relazioni d'ordine. Insiemi parzialmente ordinati. Elementi massimali e minimali. Maggioranti e minoranti. Estremo superiore ed estremo inferiore. Massimi e minimi. Insiemi completi. Insiemi ben ordinati .....	49
	Esercizi risolti .....	51
	Esercizi proposti .....	60
§ 7	Reticoli. Principio di dualità. Reticoli distributivi. Reticoli limitati. Reticoli complementati. Reticoli di Boole .....	61
	Esercizi risolti .....	63
	Esercizi proposti .....	68
§ 8	Numeri naturali. Principio di induzione. Algoritmo di divisione su $\mathbb{N}_0$ . Divisori e multipli. MCD e mcm. Algoritmo euclideo. Fattorizzazione in elementi primi. Identità di Bézout in $\mathbb{Z}$ . Numerazione in base $a$ ed operazioni in base $a$ . Congruenze su $\mathbb{Z}$ modulo $n$ . L'insieme $\mathbb{Z}_n$ ed operazioni su esso. Soluzioni di congruenze. Teorema di Eulero. Teorema di Fermat. Potenze in $\mathbb{Z}_n$ . Criteri di divisibilità. Teorema cinese del resto .....	69
	Esercizi risolti .....	79
	Esercizi proposti .....	89

## Capitolo II Teoria dei gruppi.

§ 1	Operazioni binarie. Associatività. Commutatività. Elemento neutro. Elementi invertibili. Gruppoidi, semigrupperi. Gruppi. Gruppi abeliani. Gruppi di trasformazioni o sostituzioni. Sottogruppi. Ordine di un gruppo finito.....	92
	Esercizi risolti.....	96
	Esercizi proposti.....	111
§ 2	Gruppi ciclici. Generatori di un gruppo ciclico. Teorema di Lagrange. Lateralità. Ordine di un elemento. Teorema di Cauchy.....	113
	Esercizi risolti.....	115
	Esercizi proposti.....	127
§ 3	Sottogruppi normali. Gruppi quozienti. Omomorfismi tra gruppi. Nucleo ed immagine di un omomorfismo. Teorema dell'omomorfismo e dell'isomorfismo.....	129
	Esercizi risolti.....	131
	Esercizi proposti.....	154

§ 4	Gruppi finitamente generati. Centralizzanti. Centro di un gruppo. Elementi coniugati. Equazione di classe. $p$ -gruppi.....	159
	Esercizi risolti.....	160
	Esercizi proposti.....	175
§ 5	Teorema di Cayley. Teoremi di Sylow I e II. Prodotto diretto di gruppi.....	177
	Esercizi risolti.....	179
	Esercizi proposti.....	190
	Esercizi riassuntivi risolti.....	192
	Esercizi riassuntivi proposti.....	201

### Capitolo III Teoria degli anelli.

§ 1	Anelli. Prime proprietà. Divisori dello zero. Elementi invertibili. Domini, Campi, Sottoanelli. Caratteristica di un anello.....	203
	Esercizi risolti.....	204
	Esercizi proposti.....	216
§ 2	Omomorfismi tra anelli. Nucleo ed immagine di un omomorfismo. Ideali. Operazioni tra ideali. Ideali principali ed ideali finitamente generati. Anelli quozienti. Teorema dell'omomorfismo. Corrispondenza tra ideali mediante omomorfismi.....	218
	Esercizi risolti.....	221
	Esercizi proposti.....	229
§ 3	Ideali primi. Ideali massimali. Anelli locali. Immersione di un dominio in un campo. Numeri complessi. Radici $n$ -esime dei numeri complessi. Polinomi.....	231
	Esercizi risolti.....	233
	Esercizi proposti.....	246
§ 4	Domini euclidei, Domini ad ideali principali (PID). Elementi primi. Elementi irriducibili. Algoritmo di divisione. Interi di Gauss. Radici di un polinomio. Radici multiple. Teorema fondamentale dell'algebra.....	249
	Esercizi risolti.....	253
	Esercizi proposti.....	267
§ 5	Domini fattoriali (UFD). MCD e mcm negli UFD. Teorema di Gauss. Criterio di Eisenstein.....	269

Esercizi risolti.....	270
Esercizi proposti.....	282
§ 6 Elementi idempotenti. Anelli booleani. Algebre di Boole.....	283
Esercizi risolti.....	284
Esercizi proposti.....	291
Esercizi riassuntivi risolti.....	292
Esercizi riassuntivi proposti.....	310
<b>Indice analitico degli argomenti trattati.....</b>	<b>313</b>