

Piermarco Cannarsa
Teresa D'Aprile

Introduzione alla teoria della misura e all'analisi funzionale

Indice

Parte I Misura e integrazione

1	Spazi di misura	3
1.1	Algebre e σ -algebre di insiemi	4
1.1.1	Notazioni e preliminari	4
1.1.2	Algebre e σ -algebre	5
1.2	Misure	7
1.2.1	Funzioni additive e σ -additive	7
1.2.2	Spazi di misura	10
1.2.3	Lemma di Borel–Cantelli	12
1.3	Teorema di estensione	12
1.3.1	Classi monotone	13
1.3.2	Misure esterne	15
1.4	Misure di Borel in $\mathbb{R}^N$	19
1.4.1	Misura di Lebesgue in $[0, 1)$	19
1.4.2	Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$	21
1.4.3	Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^N$	24
1.4.4	Esempi	26
1.4.5	Regolarità delle misure di Radon	28
2	Integrazione	35
2.1	Funzioni misurabili	36
2.1.1	Immagine inversa di una funzione	36
2.1.2	Funzioni misurabili e funzioni di Borel	36
2.2	Convergenza quasi ovunque	42
2.3	Approssimazione con funzioni continue	44
2.4	Integrale di funzioni di Borel	47
2.4.1	Integrale di funzioni semplici positive	47
2.4.2	Funzione di ripartizione	48
2.4.3	Integrale archimedeo	50
2.4.4	Integrale di funzioni di Borel positive	53

2.4.5	Integrale di funzioni con segno variabile	59
2.5	Convergenza di integrali	63
2.5.1	Convergenza dominata	64
2.5.2	Sommabilità uniforme	67
2.5.3	Integrali dipendenti da parametro	70
3	Spazi L^p	75
3.1	Spazi $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ e $L^p(X, \mu)$	75
3.2	Spazio $L^\infty(X, \mu)$	83
3.3	Convergenza in misura	87
3.4	Convergenza e approssimazione in L^p	89
3.4.1	Risultati di convergenza	89
3.4.2	Sottoinsiemi densi in L^p	92
4	Misure prodotto	97
4.1	Spazi prodotto	97
4.1.1	Misura prodotto	97
4.1.2	Teorema di Fubini-Tonelli	101
4.2	Compattezza in L^p	104
4.3	Convoluzione e approssimazione	108
4.3.1	Prodotto di convoluzione	108
4.3.2	Approssimazione con funzioni regolari	112
Parte II Analisi funzionale		
5	Spazi di Hilbert	121
5.1	Definizioni ed esempi	122
5.2	Proiezione ortogonale	125
5.2.1	Proiezione su un insieme convesso chiuso	126
5.2.2	Proiezione su un sottospazio chiuso	128
5.3	Teorema di Rappresentazione di Riesz	132
5.3.1	Funzionali lineari limitati	132
5.3.2	Teorema di Riesz	133
5.4	Successioni e basi ortonormali	137
5.4.1	Disuguaglianza di Bessel	138
5.4.2	Basi ortonormali	139
5.4.3	Completezza del sistema trigonometrico	142
6	Spazi di Banach	147
6.1	Definizioni e esempi	148
6.2	Operatori lineari limitati	150
6.2.1	Il Principio di Limitatezza Uniforme	153
6.2.2	Il Teorema dell'Applicazione Aperta	155
6.3	Funzionali lineari limitati	159

6.3.1	Il Teorema di Hahn–Banach	159
6.3.2	Separazione di insiemi convessi	164
6.3.3	Il duale di ℓ^p	169
6.4	Convergenza debole e riflessività	173
6.4.1	Spazi riflessivi	173
6.4.2	Convergenza debole e proprietà di Bolzano–Weierstrass	176

Parte III Capitoli scelti

7	Funzioni a variazione limitata e funzioni assolutamente continue	189
7.1	Funzioni monotone	190
7.1.1	Derivabilità delle funzioni monotone	191
7.2	Funzioni a variazione limitata	196
7.3	Funzioni assolutamente continue	201
8	Misure con segno	211
8.1	Confronto fra misure	212
8.2	Decomposizione di Lebesgue	213
8.2.1	Il caso di misure finite	213
8.2.2	Il caso generale	216
8.3	Misure con segno	218
8.3.1	Variazione totale	219
8.3.2	Teorema di Radon–Nikodym	221
8.3.3	Decomposizione di Hahn	222
8.4	Il duale di $L^p(X, \mu)$	224
9	Funzioni multivoche	229
9.1	Definizioni e esempi	229
9.2	Esistenza di una selezione sommabile	231

Appendici

A	Funzione distanza	237
B	Funzioni semicontinue	243
C	Spazi normati di dimensione finita	247
D	Lemma di Baire	251
E	Famiglie relativamente compatte di funzioni continue	253
F	Trasformata di Legendre	255

G	Lemma di ricoprimento di Vitali	259
H	Principio variazionale di Ekeland	261
	Riferimenti bibliografici.....	263
	Indice analitico	265