

Luigi Amerio

ANALISI MATEMATICA

con elementi di analisi funzionale

Volume terzo

Metodi matematici e applicazioni

Parte II

UTET

INDICE

<i>Elenco di simboli e definizioni</i>	IX
--	----

Capitolo 1 Distribuzioni	1
---	---

1. Distribuzioni: gli spazi $\mathcal{D}$ e $\mathcal{D}'$ e le loro pseudo-topologie. Serie di distribuzioni. Le operazioni di traslazione, composizione, moltiplicazione	1
2. Derivazione delle distribuzioni	26
3. Integrazione delle distribuzioni	33
4. Sistemi differenziali ed equazioni lineari di ordine n , nelle distribuzioni	45
5. Supporto di una distribuzione. Gli spazi $\mathcal{D}'_+$, $\mathcal{D}'_0$ ed $\mathcal{D}'_c$	57
6. Convoluzione delle distribuzioni	64
7. Distribuzioni temperate	69
8. Distribuzioni periodiche: serie di Fourier	80
9. Trasformata di Fourier delle distribuzioni temperate. Teorema di Plancherel. Serie e trasformata di Fourier delle distribuzioni periodiche	90
10. Trasformata di Laplace delle distribuzioni. Calcolo simbolico di Heaviside. Equazioni di convoluzione	106
11. Distribuzioni in più variabili. Soluzioni fondamentali delle equazioni della corda vibrante, dei telegrafi, del calore, di monogeneità e di Laplace	122

12. Trasformazione parziale di Laplace e calcolo simbolico in problemi di propagazione per le equazioni della corda vibrante, dei telegrafi e del calore: soluzioni discontinue e soluzioni impulsive	136
---	-----

Capitolo 2 Calcolo delle variazioni nell'indirizzo di Tonelli

1. Oggetto del calcolo delle variazioni. Insiemi compatti. Funzionali semicontinui inferiormente	154
2. Teorema fondamentale: esistenza del minimo per ogni funzionale s.c.i. in un insieme compatto	163
3. Successioni relativamente compatte: teoremi di Ascoli-Arzelà e di Tonelli	166
4. Teoremi di semicontinuità inferiore	173
5. Teorema di esistenza del minimo. Condizioni tipiche di vincolo: passaggio per due punti, o per un punto; problema dell'ostacolo	183
6. Equazione non lineare della corda vibrante; caso dinamico e caso statico. Interpretazione variazionale ed esistenza di configurazioni di equilibrio nel caso statico; teorema di unicità	189
7. Teorema di densità; applicazione ai problemi del § 6	205
8. Calcolo numerico delle funzioni di minimo: caso elementare, metodo di Ritz, metodo di penalizzazione; applicazioni ai problemi del § 6.	216
9. Cenno sugli ulteriori sviluppi del Calcolo delle Variazioni: integrali dipendenti dalle derivate di ordine > 1 ; integrali multipli; il problema della regolarizzazione	233

Capitolo 3 Operatori ed equazioni funzionali lineari

1. Operatori lineari limitati negli spazi di Banach	236
2. Spazio duale, $X^* = \mathcal{L}(X, \mathcal{C})$, di uno spazio X , di Banach. Teorema di Hahn-Banach	250
3. Prodotto di operatori lineari. Polinomi e serie di potenze di operatori lineari	256
4. Teorema dell'uniforme limitatezza. Convergenza forte di una successione $\{A_n\}$ di operatori	264
5. Operatore inverso: teorema di limitatezza. Teorema di dipendenza continua per l'equazione $Ax = y$	267

6. Operatore aggiunto negli spazi di Hilbert. Operatori autoaggiunti. Proiettori. Operatori unitari	272
7. Convergenza scalare e convergenza debole. Convergenza debole di una successione di operatori. Compattezza debole negli spazi di Hilbert: estensione del teorema di Bolzano-Weierstrass	284
8. Autovalori, autosoluzioni, autovettori; caso autoaggiunto. Valori singolari. L'equazione $x = \gamma Ax + y$, con A operatore elementare	296
9. Risoluzione dell'equazione di Fredholm: i teoremi di Fredholm. Operatori completamente continui. L'equazione $Tx = y$, con $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ e a codominio chiuso	304
10. L'equazione di Fredholm nel caso autoaggiunto. Sviluppi in serie di autosoluzioni. Interpretazioni variazionali e geometriche (forme canoniche). L'equazione $Ax = y$. Risoluzione di problemi ai limiti per equazioni differenziali lineari ordinarie	315
11. Ordinamento parziale degli operatori autoaggiunti; disuguaglianza di Schwarz generalizzata; convergenza forte delle successioni monotone e limitate.	336
12. Funzioni di un operatore autoaggiunto	343
13. L'integrale di Stieltjes.	348
14. Analisi spettrale degli operatori autoaggiunti limitati: teorema di Hilbert	353
15. Operatori illimitati. Operatori chiusi. Il teorema del grafico chiuso	362
16. Aggiunto di un operatore illimitato; operatori simmetrici; operatori autoaggiunti. Teorema di decomposizione spettrale di von Neumann	369
17. Risolvente e spettro di un operatore lineare	376
18. Analisi spettrale degli operatori autoaggiunti illimitati. Spettro puntuale e spettro continuo. Teoremi di sviluppo. Autointegrali	382

Capitolo 4 Equazioni a derivate parziali: metodi classici e di analisi funzionale

1. Equazioni del primo ordine: linee e strisce caratteristiche. Problema di Cauchy	391
2. Equazioni e sistemi in forma normale, nel campo analitico. Problema di Cauchy; teorema di Cauchy-Kowalewsky	412

1	Scrittura matriciale dei sistemi quasi-lineari. Equazione caratteristica e linee bicaratteristiche. Sistemi in due, o in tre, variabili indipendenti: discussione relativa al problema di Cauchy	426
4	Equazioni del secondo ordine in due variabili indipendenti: classificazione nei tipi iperbolico, ellittico, parabolico, misto; caratteristiche; dominio di dipendenza per la soluzione del problema di Cauchy nelle equazioni iperboliche. Classificazione per le equazioni del secondo ordine in n variabili indipendenti	434
5	Equazione delle onde in dimensione due (o equazione della membrana vibrante)	449
6	Equazioni di Laplace e di Poisson. Problemi di Dirichlet, di Neumann, di Dirichlet-Neumann. La nozione di problema ben posto	454
7	Formule di Green per l'operatore di Laplace. Teorema di unicità per i problemi di Dirichlet e di Dirichlet-Neumann. Equazione di Gauss (o di compatibilità) per il problema di Neumann	459
8	Soluzione fondamentale per l'equazione di Laplace in m variabili. Formule fondamentali di Green: applicazione al problema di Neumann, tradotto in equazione integrale di Fredholm. Sviluppo delle funzioni armoniche in serie multipla di Taylor	468
9	Schema di risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Laplace col metodo delle differenze finite	478
10	Teoremi della media e di monotonia (o principio del massimo) per le funzioni armoniche. Teoremi di unicità e di dipendenza continua per il problema di Dirichlet	483
11	L'equazione iperbolica $\square z = f(x, y, z, z_x, z_y)$ nello spazio funzionale C^1 . Problemi elementari: di Darboux, di Goursat, di Cauchy. Problema di propagazione. Dominio di dipendenza e dominio di influenza. Equazione dell'energia	486
12	L'equazione di D'Alembert nell'ambito delle distribuzioni: integrale generale. Integrazione in L^1_{loc} : soluzioni discontinue, legge di propagazione delle discontinuità lungo le caratteristiche	512
13	L'equazione $\square z = f(x, y, z)$ nello spazio L^1_{loc} ; problemi elementari e di propagazione. Soluzioni discontinue: propagazione delle discontinuità dei dati lungo le caratteristiche	527

14.	Introduzione alla teoria hilbertiana delle equazioni a derivate parziali: gli spazi H^1 , H_0^1 , H^s , H_0^s ; teorema di Rellich e teoremi di immersione di Sobolev; funzioni a valori vettoriali	539
15.	Equazione generalizzata di Poisson: soluzioni classiche e soluzioni deboli. Soluzioni ad energia finita	554
16.	Il problema di Dirichlet per l'equazione generalizzata di Poisson: teoremi di unicità, di esistenza, di dipendenza continua; interpretazione variazionale	559
17.	Autovalori ed autosoluzioni del problema di Dirichlet per l'equazione generalizzata di Poisson	565
18.	Equazione generalizzata delle onde. Problema di propagazione. Soluzioni classiche e soluzioni deboli. Soluzioni ad energia finita. Equazione dell'energia. Il fenomeno della quasi-periodicità	571
19.	Equazione generalizzata del calore. Soluzioni classiche e soluzioni deboli (a valori in H_0^1)	585