


Sandro Salsa

# Equazioni a derivate parziali

Metodi, modelli e applicazioni

2a edizione

 Springer

---

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b> .....	1
1.1	Modelli matematici .....	1
1.2	Equazioni a derivate parziali .....	2
1.3	Problemi ben posti .....	6
1.4	Notazioni e nozioni preliminari .....	7
1.5	Serie di Fourier .....	11
1.6	Domini regolari e Lipschitziani .....	14
1.7	Formule di integrazione per parti .....	16
<b>2</b>	<b>Diffusione</b> .....	19
2.1	L'equazione di diffusione .....	19
2.1.1	Introduzione e prime proprietà .....	19
2.1.2	La conduzione del calore .....	21
2.1.3	Problemi ben posti ( $n = 1$ ) .....	23
2.1.4	Un esempio elementare. Il metodo di separazione delle variabili .....	26
2.1.5	Problemi in dimensione $n > 1$ .....	34
2.2	Principi di massimo e questioni di unicità .....	37
2.3	La soluzione fondamentale .....	42
2.3.1	Soluzione fondamentale ( $n = 1$ ) .....	42
2.3.2	La distribuzione di Dirac .....	46
2.3.3	Soluzione fondamentale ( $n > 1$ ) .....	49
2.4	Passeggiata aleatoria simmetrica ( $n = 1$ ) .....	51
2.4.1	Calcoli preliminari .....	51
2.4.2	La probabilità di transizione limite .....	55
2.4.3	Dalla passeggiata aleatoria al moto Browniano .....	56
2.5	Diffusione, trasporto e reazione .....	60
2.5.1	Passeggiata aleatoria con deriva (drift) .....	60
2.5.2	Inquinante in un canale .....	63
2.5.3	Passeggiata aleatoria con deriva e reazione .....	66

2.6	Passeggiata aleatoria multidimensionale .....	67
2.6.1	Il caso simmetrico .....	67
2.6.2	Passeggiata con deriva e reazione .....	71
2.7	Un esempio di diffusione e reazione ( $n = 3$ ) .....	71
2.8	Il problema di Cauchy globale ( $n = 1$ ) .....	77
2.8.1	Il caso omogeneo .....	77
2.8.2	Esistenza della soluzione .....	79
2.8.3	Il caso non omogeneo, Metodo di Duhamel .....	81
2.8.4	Principio di massimo globale. Unicit� .....	84
2.9	Un'applicazione alla finanza matematica .....	87
2.9.1	Un modello di evoluzione per il prezzo .....	88
2.9.2	L'equazione di Black-Scholes .....	91
2.9.3	Le soluzioni .....	94
2.9.4	Strategia di copertura (self-financing strategy) .....	99
2.10	Due modelli non lineari .....	101
2.10.1	Diffusione non lineare. Equazione dei mezzi porosi .....	101
2.10.2	Reazione non lineare. Equazione di Fischer .....	104
	Problemi .....	108
<b>3</b>	<b>Equazione di Laplace</b> .....	<b>117</b>
3.1	Introduzione .....	117
3.2	Problemi ben posti. Unicit� .....	118
3.3	Funzioni armoniche .....	120
3.3.1	Funzioni armoniche nel discreto .....	120
3.3.2	Propriet� di media .....	124
3.3.3	Principi di massimo .....	125
3.3.4	Il problema di Dirichlet in un cerchio. Formula di Poisson .....	128
3.3.5	Disuguaglianza di Harnack e teorema di Liouville .....	134
3.3.6	Una soluzione probabilistica per il problema di Dirichlet .....	135
3.3.7	Ricorrenza e moto Browniano .....	139
3.4	Soluzione fondamentale e potenziale Newtoniano .....	140
3.4.1	La soluzione fondamentale .....	140
3.4.2	Il potenziale Newtoniano .....	142
3.4.3	Formula di scomposizione di Helmholtz .....	145
3.5	La funzione di Green .....	149
3.5.1	Potenziali (domini limitati) .....	149
3.5.2	La funzione di Green per il problema di Dirichlet .....	151
3.5.3	Formula di rappresentazione di Green .....	154
3.5.4	La funzione di Neumann .....	156
3.6	Unicit� in domini illimitati .....	157
3.6.1	Problemi esterni .....	157
3.7	Potenziali di superficie .....	160
3.7.1	Il potenziale di doppio strato .....	161

3.7.2	Il potenziale di strato semplice .....	166
3.7.3	Cenno alle equazioni integrali della teoria del potenziale .....	166
	Problemi .....	170
<b>4</b>	<b>Leggi di conservazione scalari ed equazioni del prim'ordine .....</b>	<b>177</b>
4.1	Leggi di conservazione .....	177
4.2	Equazione lineare del trasporto .....	178
4.2.1	Inquinante in un fiume .....	178
4.2.2	Sorgente distribuita .....	179
4.2.3	Estinzione e sorgente localizzata .....	181
4.2.4	Caratteristiche inflow e outflow .....	183
4.3	Traffico su strada .....	185
4.3.1	Un modello di dinamica del traffico .....	185
4.3.2	Il metodo delle caratteristiche .....	187
4.3.3	Coda al semaforo .....	189
4.3.4	Traffico crescente con $x$ .....	193
4.4	Soluzioni integrali .....	196
4.4.1	Riesame del metodo delle caratteristiche .....	196
4.4.2	Definizione di soluzione integrale .....	199
4.4.3	Condizione di Rankine-Hugoniot .....	202
4.4.4	Condizione di entropia. Problema di Riemann .....	205
4.4.5	Soluzioni nel senso della viscosità .....	209
4.4.6	L'equazione di Burgers con viscosità .....	213
4.5	Equazioni quasilineari .....	215
4.5.1	Caratteristiche .....	215
4.5.2	Il problema di Cauchy (I) .....	217
4.5.3	Il metodo degli integrali primi .....	226
4.5.4	Moto di fluidi nel sottosuolo .....	228
4.6	Equazioni generali del prim'ordine .....	230
4.6.1	Strisce caratteristiche .....	230
4.6.2	Il problema di Cauchy (II) .....	233
4.6.3	Ottica geometrica .....	236
	Problemi .....	239
<b>5</b>	<b>Onde e vibrazioni .....</b>	<b>245</b>
5.1	Concetti generali .....	245
5.1.1	Tipi di onde .....	245
5.1.2	Velocità di gruppo e relazione di dispersione .....	247
5.2	Onde trasversali in una corda .....	251
5.2.1	Derivazione del modello .....	251
5.2.2	Energia .....	253
5.3	L'equazione delle onde unidimensionale .....	254
5.3.1	Condizioni iniziali e al bordo .....	254

5.3.2	Separazione delle variabili .....	256
5.4	La formula di d'Alembert .....	261
5.4.1	L'equazione omogenea .....	261
5.4.2	Soluzioni generalizzate e propagazione delle singularità .....	265
5.4.3	Soluzione fondamentale .....	269
5.4.4	L'equazione non omogenea. Metodo di Duhamel .....	271
5.4.5	Effetti di dispersione e dissipazione .....	272
5.5	Equazioni lineari del secondo ordine .....	275
5.5.1	Classificazione .....	275
5.5.2	Caratteristiche e forma canonica .....	278
5.6	Sistemi iperbolici a coefficienti costanti .....	282
5.7	Equazione delle onde ( $n > 1$ ) .....	287
5.7.1	Soluzioni speciali .....	287
5.7.2	Problemi ben posti. Unicità .....	290
5.8	Due modelli classici .....	293
5.8.1	Piccole vibrazioni di una membrana elastica .....	293
5.8.2	Onde sonore nei gas .....	297
5.9	Il problema di Cauchy .....	302
5.9.1	Soluzione fondamentale in dimensione $n = 3$ e principio di Huygens .....	302
5.9.2	Formula di Kirchhoff .....	305
5.9.3	Il problema di Cauchy in dimensione $n = 2$ .....	308
5.9.4	Equazione non omogenea. Potenziali ritardati .....	310
5.10	Onde d'acqua lineari .....	312
5.10.1	Un modello per onde di superficie .....	312
5.10.2	Adimensionalizzazione e linearizzazione .....	316
5.10.3	Onde lineari in acqua profonda .....	318
5.10.4	Interpretazione della soluzione .....	321
5.10.5	Comportamento asintotico .....	322
5.10.6	Il metodo della fase stazionaria .....	324
	Problemi .....	327
<b>6</b>	<b>Elementi di analisi funzionale .....</b>	<b>333</b>
6.1	Motivazione .....	333
6.2	Spazi normati, metrici e topologici. Spazi di Banach .....	339
6.3	Spazi di Hilbert .....	346
6.4	Ortogonalità e proiezioni negli spazi di Hilbert .....	351
6.4.1	Il Teorema di Proiezione .....	351
6.4.2	Basi ortonormali .....	356
6.5	Operatori lineari. Spazio duale .....	361
6.5.1	Operatori lineari .....	361
6.5.2	Funzionali e spazio duale .....	364
6.5.3	Aggiunto di un operatore limitato .....	368
6.6	Problemi variazionali astratti .....	370
6.6.1	Forme bilineari. Teorema di Lax-Milgram .....	370

6.6.2	Minimizzazione di funzionali quadratici .....	375
6.6.3	Approssimazione e metodo di Galerkin .....	377
6.7	Compattezza .....	379
6.7.1	Compattezza e convergenza debole .....	379
6.7.2	Criteri di compattezza in $C(\bar{\Omega})$ e in $L^2(\Omega)$ .....	381
6.7.3	Convergenza debole e compattezza .....	382
6.7.4	Operatori compatti .....	386
6.8	Teorema dell'Alternativa di Fredholm .....	388
6.8.1	Alternativa per problemi variazionali astratti .....	388
6.8.2	Teorema dell'Alternativa di Fredholm .....	394
6.9	Spettro di un operatore compatto autoaggiunto .....	396
6.9.1	Risolvente e spettro (reale) di un operatore lineare continuo .....	396
6.9.2	Operatori compatti autoaggiunti .....	399
6.9.3	Applicazione ai problemi variazionali astratti .....	404
	Problemi .....	407
7	<b>Distribuzioni e spazi di Sobolev</b> .....	411
7.1	Distribuzioni .....	411
7.1.1	Considerazioni preliminari .....	411
7.1.2	Funzioni test e mollificatori .....	413
7.1.3	Le distribuzioni .....	416
7.2	Calcolo differenziale .....	420
7.2.1	Derivata nel senso delle distribuzioni .....	420
7.2.2	Gradiente, divergenza, rotore, Laplaciano .....	423
7.3	Moltiplicazione, composizione, divisione .....	426
7.3.1	Moltiplicazione. Regola di Leibniz .....	426
7.3.2	Composizione .....	427
7.3.3	Divisione .....	429
7.3.4	Convoluzione .....	430
7.4	Trasformata di Fourier .....	432
7.4.1	Distribuzioni temperate .....	432
7.4.2	Trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .....	435
7.4.3	Formula di sommazione di Poisson. Trasformata del pettine di Dirac .....	438
7.4.4	Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R}^n)$ .....	439
7.5	Spazi di Sobolev .....	440
7.5.1	Una costruzione astratta .....	440
7.5.2	Lo spazio $H^1(\Omega)$ .....	441
7.5.3	Lo spazio $H_0^1(\Omega)$ .....	446
7.5.4	Duale di $H_0^1(\Omega)$ .....	447
7.5.5	Gli spazi $H^m(\Omega)$ , $m > 1$ .....	450
7.5.6	Regole di calcolo .....	451
7.5.7	Trasformata di Fourier e spazi di Sobolev .....	452

7.6	Approssimazioni con funzioni regolari ed estensioni .....	453
7.6.1	Approssimazioni locali .....	453
7.6.2	Estensioni e approssimazioni globali .....	454
7.7	Tracce .....	458
7.7.1	Tracce di funzioni in $H^1(\Omega)$ .....	458
7.7.2	Tracce di funzioni in $H^m(\Omega)$ .....	462
7.7.3	Spazi di tracce .....	463
7.8	Compattezza e immersioni .....	465
7.8.1	Teorema di Rellich .....	465
7.8.2	Disuguaglianze di Poincaré .....	467
7.8.3	Disuguaglianze di Sobolev in $\mathbb{R}^n$ .....	468
7.8.4	Immersione di Sobolev in domini limitati .....	470
7.9	Spazi dipendenti dal tempo .....	471
7.9.1	Funzioni a valori in spazi di Hilbert .....	471
7.9.2	Spazi di Sobolev dipendenti dal tempo .....	473
	Problemi .....	476
<b>8</b>	<b>Formulazione variazionale di problemi ellittici</b> .....	<b>479</b>
8.1	Equazioni ellittiche .....	479
8.2	Tipi di soluzione .....	481
8.3	Formulazioni variazionali per l'equazione di Poisson .....	483
8.3.1	Condizioni di Dirichlet .....	484
8.3.2	Condizioni di Neumann .....	486
8.3.3	Autovalori e autofunzioni dell'operatore di Laplace .....	489
8.3.4	Un risultato di stabilità asintotica .....	491
8.4	Equazioni generali in forma di divergenza .....	493
8.4.1	Problema di Dirichlet .....	494
8.4.2	Problema di Neumann .....	500
8.4.3	Problema di Robin .....	503
8.4.4	Problema misto .....	503
8.5	Principi di massimo .....	505
8.6	Questioni di regolarità .....	508
8.7	Alcune applicazioni della teoria .....	515
8.7.1	Uno schema iterativo per equazioni semilineari .....	515
8.7.2	Equilibrio di una piastra .....	518
8.7.3	Il sistema di Stokes .....	520
8.8	Un problema di controllo ottimo .....	525
8.8.1	Struttura del problema .....	525
8.8.2	Esistenza e unicità della coppia ottima .....	527
8.8.3	Moltiplicatori di Lagrange e condizioni di ottimalità .....	528
8.8.4	Un algoritmo iterativo .....	530
	Problemi .....	532
<b>9</b>	<b>Formulazione debole per problemi di evoluzione</b> .....	<b>541</b>
9.1	Equazioni paraboliche .....	541

9.2	Equazione di diffusione .....	542
9.2.1	Problema di Cauchy-Dirichlet .....	542
9.2.2	Il metodo di Faedo-Galerkin (I) .....	545
9.2.3	Soluzione del problema approssimato .....	546
9.2.4	Stime dell'energia .....	547
9.2.5	Esistenza, unicità e stabilità .....	551
9.2.6	Problema di Cauchy-Neumann .....	554
9.2.7	Regolarità .....	556
9.3	Equazioni generali in forma di divergenza .....	558
9.3.1	Formulazione debole dei principali problemi .....	558
9.3.2	Il metodo di Faedo-Galerkin (II) .....	561
9.3.3	Principio di massimo debole .....	564
9.4	Diffusione e reazione non lineare .....	565
9.4.1	Metodo delle sopra/sottosoluzioni .....	565
9.4.2	Equilibri, linearizzazione e stabilità .....	569
9.5	Equazione delle onde .....	573
9.5.1	Il problema di Cauchy-Dirichlet .....	574
9.5.2	Il metodo di Faedo-Galerkin (III) .....	576
9.5.3	Soluzione del problema approssimato .....	576
9.5.4	Stime dell'energia .....	577
9.5.5	Esistenza, unicità e stabilità .....	580
	Problemi .....	583
<b>Appendice A Analisi dimensionale .....</b>		<b>585</b>
A.1	Un esempio preliminare .....	585
A.2	Dimensioni e leggi fisiche .....	587
A.3	Il teorema Pi di Buckingham .....	588
<b>Appendice B Misure e integrali .....</b>		<b>593</b>
B.1	Misura di Lebesgue .....	593
B.1.1	Un problema di ... conteggio .....	593
B.1.2	Misure e funzioni misurabili .....	595
B.2	Integrale di Lebesgue .....	597
B.3	Integrali rispetto a una misura qualunque .....	600
<b>Appendice C Identità e formule .....</b>		<b>603</b>
C.1	Gradiente, divergenza, rotore, Laplaciano .....	603
C.2	Identità e formule .....	605
C.2.1	Formule di Gauss .....	605
C.2.2	Formule di Stokes .....	605
C.2.3	Identità vettoriali .....	606
<b>Bibliografia .....</b>		<b>607</b>
<b>Indice analitico .....</b>		<b>611</b>