

Sergej Michajlovič Nikolskij

# Corso di analisi matematica

volume I

Edizioni Mir

# Indice

- p. 9      Prefazione alla prima edizione russa
- 11      I. Introduzione
- § 1.1. Osservazioni preliminari (11) — § 1.2. Insieme, intervalli aperti e chiusi (11) — § 1.3. Funzione (14) — § 1.4. Nozione di continuità di una funzione (23) — § 1.5. Derivata (26) — § 1.6. Funzione primitiva, integrale indefinito (32) — § 1.7. Nozione di integrale definito. Area di una figura curvilinea (33)
- 39      II. Numeri reali
- § 2.1. Numeri razionali e irrazionali (39) — § 2.2. Definizione di disuguaglianza (43) — § 2.3. Definizione di operazioni aritmetiche (44) — § 2.4. Proprietà fondamentali dei numeri reali (46) — § 2.5. Isoomorfismo di varie rappresentazioni dei numeri reali. Lunghezza di un segmento di retta. Grandezze fisiche (49) — § 2.6. Supplemento (55) — § 2.7. Disuguaglianze per i valori assoluti (57) — § 2.8. Estremo superiore ed inferiore di un insieme (57)
- 59      III. Limite di una successione
- § 3.1. Nozione di limite di una successione (59) — § 3.2. Operazioni aritmetiche sui limiti (63) — § 3.3. Grandezze infinitesime ed infinite (64) — § 3.4. Esistenza di limite per una successione monotona limitata (66) — § 3.5. Il numero  $e$  (68) — § 3.6. Lemmi sugli intervalli inclusi, sull'esistenza degli estremi di un insieme e sulla sezione nell'insieme dei numeri reali (69) — § 3.7. Sottosuccessioni. Limiti superiore e inferiore (71) — § 3.8. Criterio di Cauchy di esistenza del limite (76) — § 3.9. Teorema di Weierstrass (77) — § 3.10. Insieme numerabile. Numerabilità dell'insieme dei numeri razionali. Non numerabilità dell'insieme dei numeri reali (78)
- 80      IV. Limite delle funzioni
- § 4.1. Nozione di limite di una funzione (80) — § 4.2. Continuità di una funzione in un punto (87) — § 4.3. Limiti di una funzione a destra e a sinistra. Funzione monotona (92) — § 4.4. Funzioni continue in un intervallo chiuso (96) — § 4.5. Funzione inversa (99) — § 4.6. Funzioni esponenziale e logaritmica (102) — § 4.7. Funzione potenza  $x^p$  (106) — § 4.8. Ancora sul numero  $e$

(107) — § 4.9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  (107) — § 4.10. Ordine di una variabile. Equivalenza (asintotica) (108)

112

## V. Calcolo differenziale per le funzioni di una variabile

§ 5.1. Derivata (112) — § 5.2. Differenziale di una funzione (116) — § 5.3. Derivata di una funzione di funzione (119) — § 5.4. Derivata della funzione inversa (120) — § 5.5. Tabella delle derivate delle funzioni elementari (123) — § 5.6. Derivate e differenziali di ordine superiore (124) — § 5.7. Incremento e decremento di una funzione in un intervallo e in un punto. Estremo locale (127) — § 5.8. Teoremi della media. Criteri di incremento e di decremento di una funzione in un intervallo. Criteri sufficienti per gli estremi locali (129) — § 5.9. Formula di Taylor (133) — § 5.10. Formule di Taylor per le funzioni elementari più importanti (141) — § 5.11. Serie di Taylor (145) — § 5.12. Convessità di una curva in un punto. Punto di flesso (149) — § 5.13. Convessità di una curva in un intervallo (151) — § 5.14. Calcolo delle indeterminazioni (152) — § 5.15. Funzioni continue a tratti e regolari a tratti (157)

160

## VI. Spazio $n$ -dimensionale. Geometria di una curva

§ 6.1. Spazio  $n$ -dimensionale. Insiemi lineari (160) — § 6.2. Spazio  $n$ -dimensionale euclideo. Spazi con prodotto scalare (161) — § 6.3. Spazio lineare normalizzato (164) — § 6.4. Funzione vettore in uno spazio  $n$ -dimensionale euclideo (165) — § 6.5. Curva in uno spazio  $n$ -dimensionale (167) — § 6.6. Significato geometrico della derivata di una funzione vettore (172) — § 6.7. Lunghezza dell'arco di una curva (174) — § 6.8. Tangente. Normale ad una curva piana (176) — § 6.9. Curvatura e raggio di curvatura di una curva. Curva piana. Evoluta ed evolvente (178) — § 6.10. Piano osculatore e triedro mobile di una curva (183) — § 6.11. Asintoto (188) — § 6.12. Cambiamento di variabili (190)

192

## VII. Calcolo differenziale per le funzioni di più variabili

§ 7.1. Insieme aperto (192) — § 7.2. Limite di una funzione (194) — § 7.3. Funzioni continue (198) — § 7.4. Derivate parziali e derivate lungo una direzione (201) — § 7.5. Funzione differenziabile. Piano tangente (203) — § 7.6. Derivata di una funzione composta. Derivata lungo una direzione; gradiente (207) — § 7.7. Indipendenza dall'ordine di derivazione (213) — § 7.8. Differenziale di una funzione. Differenziale di ordine superiore (215) — § 7.9. Punto limite. Teorema di Weierstrass. Insiemi chiusi e aperti (218) — § 7.10. Funzioni su un insieme. Proprietà delle funzioni continue su un insieme chiuso (223) — § 7.11. Prolungamento di una funzione uniformemente continua. Derivata parziale sulla frontiera di un dominio (227) — § 7.12. Lemma dei rettangoli inclusi e lemma di Borel (229) — § 7.13. Formula di Taylor (229) — § 7.14. Formula di Taylor con il resto nella forma di Peano. Unicità (234) — § 7.15. Estremo locale (assoluto) di una funzione (235) — § 7.16. Teorema di esistenza di una funzione implicita (238) — § 7.17. Teorema di esistenza di una soluzione di un si-

stema di equazioni (243) — § 7.18. Applicazioni (248) — § 7.19. Superficie regolari (250) — § 7.20. Superficie regolari date in forma parametrica. Superficie orientabili (253) — § 7.21. Esempio di superficie non orientabile. Foglio di Möbius (258) — § 7.22. Estremo locale relativo (258) — § 7.23. Punti singolari di una curva (264) — § 7.24. Curve su una superficie (269) — § 7.25. Coordinate curvilinee nell'intorno della frontiera regolare di un dominio (274) — § 7.26. Cambiamento di variabili nelle derivate parziali (276) — § 7.27. Sistema di funzioni dipendenti (280)

284

### VIII. Integrali indefiniti. Algebra dei polinomi

§ 8.1. Introduzione. Metodi del cambiamento di variabili e di integrazione per parti (284) — § 8.2. Numeri complessi (289) — § 8.3. Limite di una successione di numeri complessi. Funzioni di variabile complessa (294) — § 8.4. Polinomi (297) — § 8.5. Sviluppo di una funzione razionale in frazioni elementari (300) — § 8.6. Integrazione delle frazioni razionali (305) — § 8.7. Metodo di Ostrogradskij per l'integrazione delle funzioni razionali (306) — § 8.8. Integrazione di espressioni algebriche irrazionali (309) — § 8.9. Sostituzioni di Eulero (310) — § 8.10. Differenziali binomiali. Teorema di Čebyšev (312) — § 8.11. Integrazione delle espressioni trigonometriche (313) — § 8.12. Sostituzioni trigonometriche (317) — § 8.13. Alcuni integrali importanti non esprimibili mediante funzioni elementari (317)

319

### IX. Integrale definito di Riemann

§ 9.1. Introduzione e definizione (319) — § 9.2. Limitatezza di una funzione integrabile (320) — § 9.3. Somme di Darboux (321) — § 9.4. Teorema fondamentale (322) — § 9.5. Teoremi di esistenza dell'integrale di una funzione monotona e continua in  $[a, b]$  (325) — § 9.6. Teorema di Lebesgue (327) — § 9.7. Proprietà additiva ed omogenea dell'integrale (328) — § 9.8. Disuguaglianze e teorema della media (330) — § 9.9. Integrale come funzione del limite superiore. Teorema di Newton-Leibniz (332) — § 9.10. Il secondo teorema della media (336) — § 9.11. Modificazione di una funzione integranda (337) — § 9.12. Integrali impropri (338) — § 9.13. Integrali impropri delle funzioni non negative (342) — § 9.14. Integrazione per parti (345) — § 9.15. Integrali impropri e serie (347) — § 9.16. Integrali impropri con singolarità in più punti (351) — § 9.17. Formula di Taylor con resto in forma integrale (354) — § 9.18. Formule di Wallis e di Stirling (355)

360

### X. Alcune applicazioni di integrali. Metodi approssimati

§ 10.1. Area in coordinate polari (360) — § 10.2. Volume di un corpo di rotazione (361) — § 10.3. Lunghezza dell'arco di una curva regolare (363) — § 10.4. Area della superficie di un corpo di rotazione (364) — § 10.5. Polinomio d'interpolazione di Lagrange (365) — § 10.6. Formule di quadratura per rettangoli e trapezi (366) — § 10.7. Formula di quadratura generale. Funzionale (368) — § 10.8. Formula di Simpson (369) — § 10.9. Metodo generale di stima degli errori delle formule di quadratura (370) — § 10.10. Ancora sulla lunghezza di un arco (373) — § 10.11. Il numero  $\pi$ . Funzioni trigonometriche (375)

§ 11.1. Nozione di serie (380) — § 11.2. Operazioni sulle serie (382) — § 11.3. Serie con termini non negativi (383) — § 11.4. Serie di Leibniz (388) — § 11.5. Serie assolutamente convergenti (388) — § 11.6. Serie con termini reali convergenti convenzionalmente ed assolutamente (392) — § 11.7. Successioni e serie di funzioni. Convergenza uniforme (393) — § 11.8. Integrazione e derivazione delle serie uniformemente convergenti in un intervallo chiuso (400) — § 11.9. Serie multiple. Prodotto di serie assolutamente convergenti (405) — § 11.10. Sommatoria di serie e di successioni con il metodo delle medie aritmetiche (409) — § 11.11. Serie di potenze (410) — § 11.12. Derivazione e integrazione delle serie di potenze (414) — § 11.13. Serie di potenze per le funzioni  $e^z$ ,  $\cos z$ ,  $\sin z$  di variabile complessa (418)