

C.D. Pagani

S. Salsa

ANALISI MATEMATICA

Volume 1

MASSON 
Milano • Parigi • Barcellona
1994

INDICE

PREFAZIONE.....	V
CAPITOLO 1 – ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI	1
1. Nozioni di logica matematica	1
1.1 Logica delle proposizioni. Connettivi logici.....	1
1.2 Tavole di verità	3
1.3 Tautologie e regole di deduzione	4
1.4 Logica dei predicati. Quantificatori.....	7
2. Simboli ed operazioni insiemistiche fondamentali	11
2.1 Definizioni	11
3. Relazioni	17
3.1 Prodotto cartesiano	17
3.2 Definizione di relazione	18
3.3 Equivalenze	19
3.4 Ordinamenti	22
4. Funzioni	24
4.1 Definizione di funzione	24
4.2 Funzioni particolari. Successioni. Multifunzioni	29
4.3 Funzione composta.....	32
4.4 Funzioni iniettive e suriettive. Funzione inversa	34
5. Insiemi finiti	37
5.1 Numeri cardinali. Numeri naturali	37
5.2 Il principio di induzione	40
6. Elementi di calcolo combinatorio	46
6.1 Permutazioni, combinazioni, disposizioni	47
*6.2 Il principio di inclusione ed esclusione	53
*6.3 Probabilità in spazi finiti	58
7. Insiemi infiniti	63
Appendice – Cenno alla teoria assiomatica degli insiemi	65
1. Linguaggio della teoria	65
2. Apparato deduttivo.....	66
CAPITOLO 2 – INSIEMI NUMERICI	69
1. Da \mathbb{N} a \mathbb{Q}	69
1.1 Rappresentazione dei numeri naturali	69

1.2 I numeri interi relativi	71
1.3 I numeri razionali	72
1.4 Struttura di \mathbb{Q}	73
1.5 Rappresentazione dei numeri razionali	75
2. I numeri reali	78
2.1 Definizione di numero reale	78
2.2 Ordinamento	79
2.3 Struttura algebrica	80
2.4 Proprietà di completezza	83
2.5 Isomorfismo tra campi ordinati completi	86
2.6 Potenza del continuo	87
Appendice A – Dimostrazione delle proprietà di campo ordinato dei numeri reali	89
Appendice B – I numeri-macchina. Errori	93
3. Radicali – Potenze – Logaritmi	98
3.1 Radici n -esime aritmetiche	98
3.2 Potenze con esponente reale	100
3.3 Logaritmi	101
3.4 Alcune disuguaglianze	102
4. I numeri complessi	105
4.1 Definizione di \mathbb{C} e struttura di campo	105
4.2 Coniugato, modulo e argomento	107
4.3 Potenze e radici	111
CAPITOLO 3 – SPAZI EUCLIDEI	117
1. Gli spazi euclidei: \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n	117
1.1 Spazi vettoriali lineari	117
1.2 Gli spazi \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n	120
*1.3 Gruppi	123
1.4 Prodotto scalare in \mathbb{R}^n	125
1.5 Prodotto scalare in \mathbb{C}^n	131
2. Elementi di topologia in \mathbb{R}^n	134
2.1 Punti interni, esterni, di frontiera, di accumulazione, isolati	134
2.2 Insiemi aperti, chiusi, limitati	136
2.3 La retta ampliata. Gli spazi \mathbb{R}^n	142
2.4 Insiemi compatti	144
2.5 Insiemi connessi. Insiemi convessi	146
CAPITOLO 4 – L'OPERAZIONE DI LIMITE	151
1. Funzioni reali di variabile reale	151
1.1 Positività e simmetrie	151
1.2 Funzioni limitate	153
1.3 Funzioni monotone	156
2. Limiti di funzioni da \mathbb{R} in \mathbb{R}	159
2.1 Definizione di limite	159

2.2 Limite destro, sinistro, per eccesso, per difetto; in \mathbb{R}	162
2.3 Calcolo dei limiti	165
2.4 Esistenza del limite (per funzioni monotone)	173
2.5 Infinitesimi ed infiniti. Confronti	177
3. Successioni a valori in \mathbb{R}	184
3.1 Limite di una successione	184
3.2 Confronti	188
3.3 Il numero "e", alcuni limiti notevoli	192
3.4 Esistenza del limite. Massimo e minimo limite	197
3.5 Esistenza del limite finito. Criterio di Cauchy	202
*3.6 Frazioni continue	204
4. Limiti in \mathbb{C}. Limiti in \mathbb{R}^n	210
4.1 Funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m e loro limiti	210
4.2 Successioni e topologia di \mathbb{R}^n	216
4.3 Il criterio di Cauchy	219
CAPITOLO 5 – FUNZIONI CONTINUE	223
1. Funzioni continue da \mathbb{R} in \mathbb{R}	223
1.1 Definizione di continuità	223
1.2 Punti di discontinuità	226
1.3 Proprietà fondamentali delle funzioni continue su un intervallo	228
1.4 La continuità uniforme	232
2. Funzioni continue da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m	235
2.1 Una caratterizzazione delle funzioni continue	235
2.2 Funzioni continue su un compatto	239
2.3 Funzioni continue su un connesso	240
3. Funzioni elementari	242
3.1 Funzioni razionali intere. Polinomi	242
3.2 Funzioni razionali fratte	246
3.3 Funzioni algebriche	250
3.4 Esponenziali e logaritmi	251
3.5 Funzioni iperboliche e loro inverse	254
3.6 Funzioni circolari (o trigonometriche) e loro inverse	257
3.7 Esponenziale complesso	263
3.8 Logaritmo complesso. Operazione di elevamento a potenza nel campo complesso	265
CAPITOLO 6 – CALCOLO DIFFERENZIALE 1. FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE	271
1. Derivata e differenziale	271
1.1 Definizione di derivata. Derivata destra, derivata sinistra. Derivate successive	271
1.2 Algebra delle derivate	279
1.3 Derivata di funzione composta. Derivata logaritmica	282
1.4 Derivata di funzione inversa	286
1.5 Differenziale	290

2. I teoremi fondamentali del calcolo differenziale	292
2.1 Teorema di Fermat. Estremi locali	292
2.2 Teoremi di Rolle, Cauchy, Lagrange	294
2.3 Prime conseguenze del teorema di Lagrange	296
2.4 Il teorema di de L'Hôpital	301
2.5 La formula di Taylor	307
3. Alcune applicazioni	319
3.1 Funzioni convesse e concave	319
3.2 Applicazioni della formula di Taylor	326
3.3 Determinazione del grafico di una funzione	333
3.4 Risoluzione numerica di equazioni	336
CAPITOLO 7 – CALCOLO DIFFERENZIALE 2.	
FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI	349
1. Funzioni da \mathbb{R}^n in \mathbb{R}	349
1.1 Derivate direzionali e derivate parziali	349
1.2 Differenziale	353
1.3 Derivate e differenziali di ordine superiore	359
1.4 Formula di Taylor	367
1.5 Funzioni omogenee; funzioni convesse e concave	369
2. Funzioni a valori vettoriali	378
2.1 Derivate e differenziali	378
2.2 Differenziale delle funzioni composte	386
2.3 Funzioni da \mathbb{C} in \mathbb{C}	388
2.4 Il teorema di inversione locale	391
3. Funzioni implicite	401
3.1 Esempi preliminari	401
3.2 Il teorema di Dini	403
3.3 Insiemi di livello. Punti singolari	408
3.4 Inviluppo di una famiglia di curve	418
3.5 Il teorema delle funzioni implicite in più di due variabili	423
3.6 Funzioni definite da un sistema di equazioni	429
CAPITOLO 8 – INTEGRALI DI FUNZIONI DI UNA VARIABILE.	
SERIE NUMERICHE	437
1. Integrale di Riemann	437
1.1 Definizione di integrale	437
1.2 Caratterizzazioni dell'integrale e significato geometrico	441
1.3 Classi di funzioni integrabili	445
1.4 Proprietà dell'integrale	447
1.5 Il teorema fondamentale del calcolo integrale.	
Integrale indefinito	451
1.6 Regole di integrazione	457
1.7 Integrazione numerica	460
1.8 Integrali dipendenti da un parametro	463

2. Serie numeriche	475
2.1 Definizione di serie e prime proprietà	475
2.2 Serie a termini non negativi	480
2.3 Convergenza e convergenza assoluta	487
2.4 Operazioni sulle serie	491
2.5 Proprietà associativa e commutativa	494
*2.6 Medie aritmetiche	497
3. Estensioni dell'integrale di Riemann	502
3.1 Integrali impropri	502
3.2 Criteri di convergenza	506
3.3 Serie e integrali	510
*3.4 Integrale di Stieltjes	511
Appendice – Cenno all'Analisi non-standard	518
INDICE ANALITICO	525