

A. Quarteroni

Modellistica numerica per problemi differenziali

3^a edizione

Indice

Prefazione	XI
1 Richiami sulle equazioni alle derivate parziali	1
1.1 Definizioni ed esempi	1
1.2 Necessità della risoluzione numerica	3
1.3 Classificazione delle EDP	5
1.3.1 Forma quadratica associata ad una EDP	8
1.4 Esercizi	9
2 Equazioni di tipo ellittico	11
2.1 Un esempio di problema ellittico: l'equazione di Poisson	11
2.2 Il problema di Poisson nel caso monodimensionale	12
2.2.1 Problema di Dirichlet omogeneo	13
2.2.2 Problema di Dirichlet non omogeneo	19
2.2.3 Problema di Neumann	19
2.2.4 Problema misto omogeneo	20
2.2.5 Condizioni al bordo miste (o di Robin)	20
2.3 Il problema di Poisson nel caso bidimensionale	21
2.3.1 Il problema di Dirichlet omogeneo	21
2.3.2 Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte del problema di Dirichlet	24
2.3.3 Il problema con condizioni miste non omogenee	24
2.3.4 Equivalenza, nel senso delle distribuzioni, tra la forma debole e la forma forte per il problema di Neumann	27
2.4 Problemi ellittici più generali	28
2.4.1 Teorema di esistenza e unicità	30
2.5 Esercizi	32

3	Il metodo di Galerkin-elementi finiti per problemi ellittici	37
3.1	Approssimazione con il metodo di Galerkin	37
3.2	Analisi del metodo di Galerkin	39
3.2.1	Esistenza e unicità	39
3.2.2	Stabilità	40
3.2.3	Convergenza	40
3.3	Il metodo degli elementi finiti nel caso monodimensionale	43
3.3.1	Una definizione di elemento finito nel caso Lagrangiano	47
3.3.2	L'approssimazione con elementi finiti lineari	48
3.3.3	Interpolazione e stima di interpolazione	50
3.3.4	Stima dell'errore nella norma H^1	52
3.4	Il metodo degli elementi finiti nel caso multidimensionale	53
3.4.1	Risoluzione del problema di Poisson con elementi finiti	56
3.4.2	Condizionamento della matrice di rigidità	58
3.4.3	Stima dell'errore di approssimazione nella norma dell'energia	61
3.4.4	Stima dell'errore di approssimazione in norma L^2	68
3.5	Il problema dell'adattività della griglia	71
3.5.1	Adattività a priori basata sulla ricostruzione delle derivate	73
3.5.2	Adattività a posteriori	75
3.5.3	Stime a posteriori dell'errore nella norma L^2	80
3.5.4	Stime a posteriori di un funzionale dell'errore	84
3.6	Come ottenere il problema aggiunto	86
3.6.1	Il caso lineare	87
3.6.2	Il caso non lineare	88
3.7	Esercizi	91
4	I metodi spettrali	97
4.1	Il metodo di Galerkin spettrale per un problema ellittico	97
4.2	Polinomi ortogonali e integrazione numerica gaussiana	101
4.2.1	Polinomi ortogonali di Legendre	101
4.2.2	Integrazione gaussiana	104
4.2.3	Le formule di Gauss-Legendre-Lobatto	105
4.3	Metodi G-NI in una dimensione	108
4.3.1	Interpretazione algebrica del metodo G-NI	109
4.3.2	Condizionamento della matrice di rigidità del metodo G-NI	111
4.3.3	Equivalenza tra il metodo G-NI e un metodo di collocazione	112
4.4	Generalizzazione al caso bidimensionale	116
4.4.1	Convergenza del metodo G-NI	118
4.5	Metodo G-NI e MES-NI per un problema modello monodimensionale	126
4.5.1	Il metodo G-NI	127
4.5.2	Il metodo MES-NI	131
4.6	Metodi spettrali su triangoli e tetraedri	134
4.7	Esercizi	139

5	Equazioni di diffusione-trasporto-reazione	141
5.1	Formulazione debole del problema	141
5.2	Analisi di un problema di diffusione-trasporto monodimensionale	144
5.3	Analisi di un problema di diffusione-reazione monodimensionale	148
5.4	Relazioni tra elementi finiti e differenze finite	150
5.5	La tecnica del <i>mass-lumping</i>	152
5.6	Schemi decentrati e diffusione artificiale	154
5.7	Autovalori del problema di diffusione-trasporto	157
5.8	Metodi di stabilizzazione	159
5.8.1	Diffusione artificiale e schemi decentrati agli elementi finiti	160
5.8.2	Il metodo di Petrov-Galerkin	162
5.8.3	Il metodo della diffusione artificiale e della streamline diffusion nel caso bidimensionale	163
5.8.4	Consistenza ed errore di troncamento per i metodi di Galerkin e di Galerkin generalizzato	165
5.8.5	Parte simmetrica e antisimmetrica di un operatore	165
5.8.6	Metodi fortemente consistenti (GLS, SUPG, DW)	167
5.8.7	Analisi del metodo GLS	169
5.8.8	Stabilizzazione tramite funzioni a bolla	175
5.9	Alcuni test numerici	178
5.10	Un esempio di adattività <i>goal-oriented</i>	179
5.11	Esercizi	181
6	Equazioni paraboliche	185
6.1	Formulazione debole e sua approssimazione	186
6.2	Stime a priori	189
6.3	Analisi di convergenza del problema semi-discreto	192
6.4	Analisi di stabilità del θ -metodo	194
6.5	Analisi di convergenza del θ -metodo	198
6.6	Il caso dell'approssimazione spettrale G-NI	201
6.7	Esercizi	203
7	Differenze finite per equazioni iperboliche	207
7.1	Un problema di trasporto scalare	207
7.1.1	Una stima a priori	209
7.2	Sistemi di equazioni iperboliche lineari	211
7.2.1	L'equazione delle onde	213
7.3	Il metodo delle differenze finite	215
7.3.1	Discretizzazione dell'equazione scalare	216
7.3.2	Discretizzazione di sistemi iperboliche lineari	217
7.3.3	Trattamento del bordo	218
7.4	Analisi dei metodi alle differenze finite	219
7.4.1	Consistenza e convergenza	219
7.4.2	Stabilità	219
7.4.3	Analisi di Von Neumann e coefficienti di amplificazione	224

7.4.4	Dissipazione e dispersione	229
7.5	Equazioni equivalenti	233
7.5.1	Il caso dello schema upwind	233
7.5.2	Il caso dei metodi di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff	236
7.5.3	Sul significato dei coefficienti nelle equazioni equivalenti	236
7.5.4	Equazioni equivalenti e analisi dell'errore	237
7.6	Esercizi	238
8	Elementi finiti e metodi spettrali per equazioni iperboliche	241
8.1	Discretizzazione temporale	241
8.1.1	Gli schemi di Eulero in avanti e all'indietro	241
8.1.2	Gli schemi upwind, di Lax-Friedrichs e Lax-Wendroff	243
8.2	Gli schemi Taylor-Galerkin	246
8.3	Il caso multidimensionale	252
8.3.1	Condizioni al bordo e condizioni di compatibilità	254
8.3.2	Discretizzazione temporale	256
8.4	Elementi finiti discontinui	258
8.4.1	Il caso unidimensionale	258
8.4.2	Il caso multidimensionale	264
8.5	Elementi finiti spazio-temporali	266
8.6	Approssimazione con metodi spettrali	268
8.6.1	Il metodo G-NI in un singolo intervallo	268
8.6.2	Il metodo DG-SEM-NI	272
8.7	Trattamento numerico delle condizioni al bordo per sistemi iperboliche	274
8.7.1	Trattamento debole delle condizioni al bordo	278
8.8	Esercizi	280
9	Cenni a problemi iperboliche non lineari	281
9.1	Equazioni scalari	281
9.2	Approssimazione alle differenze finite	286
9.3	Approssimazione con elementi finiti discontinui	288
9.4	Sistemi iperboliche non-lineari	296
10	Le equazioni di Navier-Stokes	301
10.1	Formulazione debole delle equazioni di Navier-Stokes	303
10.2	Le equazioni di Stokes e la loro approssimazione	308
10.3	Problemi di punto-sella	312
10.3.1	Formulazione del problema	312
10.3.2	Analisi del problema di punto-sella	313
10.3.3	Approssimazione con il metodo di Galerkin ed analisi di stabilità e convergenza	317
10.4	Formulazione algebrica del problema di Stokes	320
10.5	Un esempio di problema stabilizzato	324
10.6	Un esempio numerico	326
10.7	Discretizzazione in tempo delle equazioni di Navier-Stokes	328

10.7.1 Metodi alle differenze finite	329
10.7.2 Metodi alle caratteristiche (o Lagrangiani)	331
10.7.3 Metodi a passi frazionari	332
10.8 Risoluzione del sistema di Stokes e metodi di fattorizzazione algebrica	335
10.9 Esercizi	339
11 Cenni di programmazione degli elementi finiti	343
11.1 Fasi operative di un codice a elementi finiti	343
11.1.1 Due parole sul codice utilizzato	346
11.2 Calcolo numerico degli integrali	347
11.2.1 Le coordinate baricentriche	350
11.2.2 Alcuni esempi di formule di quadratura	352
11.3 Memorizzazione di matrici sparse	353
11.4 La fase di assemblaggio	358
11.4.1 Codifica delle informazioni geometriche	360
11.4.2 Codifica delle informazioni funzionali	364
11.4.3 Mappatura tra elemento di riferimento e elemento fisico	365
11.4.4 La costruzione dei sistemi locali e di quello globale	369
11.4.5 La prescrizione delle condizioni al bordo	373
11.5 L'integrazione in tempo	376
11.6 Ed ora consideriamo un esempio completo	379
12 Generazione di griglie nel caso bidimensionale	389
12.1 Reticolazione di un dominio poligonale	389
12.2 Generazione di griglie strutturate	392
12.3 Generazione di griglie non strutturate	395
12.3.1 Triangolazione di Delaunay	395
12.3.2 Tecnica di avanzamento del fronte	397
12.4 Tecniche di regolarizzazione	398
12.4.1 Scambio delle diagonali	399
12.4.2 Movimento dei nodi	400
13 Il metodo dei volumi finiti	403
13.1 Alcuni principi elementari	404
13.2 La costruzione dei volumi di controllo per schemi <i>vertex-centered</i>	406
13.3 Discretizzazione di un problema di diffusione-trasporto-reazione	409
13.4 Analisi dell'approssimazione ai volumi finiti	411
13.5 Implementazione delle condizioni al bordo	412
13.6 Cenni alla discretizzazione delle equazioni di Navier-Stokes	413
Appendice A Richiami di analisi funzionale	417
A.1 Funzionali e forme bilineari	417
A.2 Richiami sulle distribuzioni	418
A.2.1 Le funzioni a quadrato sommabile	420
A.2.2 Derivazione nel senso delle distribuzioni	422

A.3	Gli spazi di Sobolev	423
A.3.1	Regolarità degli spazi $H^k(\Omega)$	424
A.3.2	Lo spazio $H^1_0(\Omega)$	425
A.3.3	Gli operatori di traccia	426
A.4	Lo spazio $L^\infty(\Omega)$ e gli spazi $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$	427
A.5	Esercizi	429
Appendice B	Algoritmi di risoluzione di sistemi lineari	431
B.1	Metodi diretti	431
B.2	Metodi iterativi	434
	Riferimenti bibliografici	441
	Indice analitico	447