

Jean-Claude Carrega

Théorie des corps

LA RÈGLE ET LE COMPAS

Nouvelle édition enrichie d'exercices

HERMANN



ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS

Table

CHAPITRE I	Présentation de quatre problèmes grecs	1
1.	Enoncés des problèmes	1
2.	Pourquoi la règle et le compas ?	4
3.	Historique	6
CHAPITRE II	Réponses négatives aux trois premiers problèmes	13
1.	Points et nombres constructibles	13
1.1.	Définitions	13
1.2.	Résultats élémentaires	16
1.3.	Le corps des nombres constructibles	19
2.	Caractérisation des nombres constructibles	22
2.1.	Rappels sur les extensions de corps	22
2.2.	Le résultat de Wantzel	24
2.3.	Applications aux trois premiers problèmes	30
CHAPITRE III	Compléments sur les constructions à la règle et au compas	37
1.	Caractérisation des corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}(i)$	37

2. La réciproque du résultat de Wantzel	39
3. Constructions avec plus de deux points de base	41
4. Angles trisectables	42
5. Constructions à partir d'une figure donnée	43
 CHAPITRE IV Les polygones réguliers	 47
1. Polygones réguliers constructibles	47
2. Le théorème de Gauss	48
3. Constructions de polygones réguliers	52
3.1. Triangle - carré - pentagone	52
3.2. Le polygone à 15 côtés	54
3.3. Le polygone à 17 côtés	55
3.4. Autres polygones réguliers constructibles	64
3.5. Constructions approchées de polygones réguliers non constructibles	65
 CHAPITRE V Constructions graphiques, mécaniques et approchées	 67 67
1. Les coniques de Menachme	68
2. La conchoïde de Nicomède	70
2.1. La trisection de l'angle	70
2.2. Précisions sur la conchoïde	71
2.3. La duplication du cube	72
3. Résolution graphique d'une équation du troisième degré	73
4. La cissoïde de Dioclès	77
4.1. La duplication du cube	77
4.2. Le tracé mécanique de la cissoïde de Dioclès	79
4.3. La strophoïde de Newton	81

5. La quadratrice de Dinostrate	82
5.1. La trisection de l'angle	82
5.2. La quadrature du cercle	84
6. Les approximations de π	86
6.1. Le rapport π	86
6.2. Archimède et le cercle	87
6.3. Valeurs approchées de π	89
6.4. Quadratures approchées	93
 CHAPITRE VI Constructions célèbres à la règle et au compas	 97
1. Le problème de Cramer - Castillon	98
2. Le problème de Malfatti	102
 CHAPITRE VII Le compas seul	 108
1. Le théorème de Mohr - Mascheroni	108
2. Le problème de Napoléon	115
 CHAPITRE VIII La règle seule	 119
1. Le plan projectif	120
1.1. Définition	121
1.2. Birapport	122
1.3. Espace affine	124
1.4. Espace projectif	126
2. Le théorème des constructions à la règle	130
3. Objection sur les points à l'infini	135

CHAPITRE IX	La règle accompagnée	140
1.	La règle et l'équerre traceuse de parallèles	140
2.	La règle et l'équerre	144
3.	La règle et un cercle. Le théorème de Poncelet-Steiner	146
4.	Construction à la règle des racines d'une équation du second degré	151
5.	Règle et bissecteur. Pliages	156
5.1.	<i>Points constructibles à la règle et au bissecteur</i>	156
5.2.	<i>Comparaison règle-compas et règle-bissecteur</i>	161
6.	Règle et transporteur de distances	163
CHAPITRE X	Compléments mathématiques	169
1.	Factorisation des polynômes	170
1.1.	<i>L'anneau $K[X]$</i>	170
1.2.	<i>Polynômes irréductibles de $K[X]$. Cas particuliers de $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$</i>	176
1.3.	<i>Polynômes irréductibles de $\mathbb{Q}[X]$</i>	179
2.	Extensions de corps	186
2.1.	<i>Degré d'une extension</i>	186
2.2.	<i>Polynôme minimal</i>	188
2.3.	<i>Extensions algébriques</i>	193
3.	Polynômes cyclotomiques	203
3.1.	<i>Racines primitives de l'unité</i>	203
3.2.	<i>Polynômes cyclotomiques</i>	205
3.3.	<i>L'indicateur d'Euler</i>	212

4. Le théorème de Gauss en liaison avec le théorème de Galois	214
4.1. Le théorème de Gauss	214
4.2. Retour sur le polygone à 17 côtés	219
4.3. Le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$	221
4.4. Le théorème de Galois	223
5. La transcendance de π .	236
5.1. Polynômes symétriques	236
5.2. La transcendance de π .	242
Exercices sur les constructions géométriques	249
Bibliographie	269
Index des auteurs cités	272
Index des notions	275