

Tommaso Ruggeri

Ordinario di Meccanica Razionale all'Università di Bologna

Appunti di Meccanica Razionale.
Richiami di Calcolo
Vettoriale e Matriciale



Pitagora Editrice Bologna

INDICE

Capitolo 1 - VETTORI ED OPERAZIONI VETTorialI

1.0. Simbolismo Vettoriale. Il vettore come operatore di trasporto	1
1.1. Prodotto αu	3
1.2. Versore di un vettore	3
1.3. Angolo fra due vettori	3
1.4. Giacitura di due vettori	3
1.5. Complanarità di $n > 2$ vettori	4
1.6. Somma di vettori. Regola del parallelogramma	4
1.7. Prodotto scalare	4
1.7.1. Condizioni di perpendicolarità di due vettori	4
1.7.2. Proprietà del prodotto scalare	6
1.7.3. Un'applicazione del calcolo vettoriale alla Geometria piana	6
1.7.4. Componente di un vettore secondo una direzione assegnata	7
1.7.5. Componenti di un vettore secondo due direzioni assegnate ad esso complanari. Componenti controvarianti di un vettore in E_2	8
1.7.6. Componenti di un vettore secondo un piano ed una retta assegnata	9
1.7.7. Componenti controvarianti di un vettore in E_3	10
1.7.8. Componenti covarianti di un vettore in E_3	10
1.7.9. Componenti covarianti e controvarianti del vettore $w = \lambda v$ e della somma di vettori	12
1.7.10. Espressione del prodotto scalare in componenti covarianti e controvarianti	13
1.7.11. Relazioni tra le componenti covarianti e controvarianti	13
1.7.12. Basi controvarianti e covarianti; basi ortonormali; coordinate cartesiane ortogonali	13

1.8. Prodotto vettoriale	15
1.8.1. Definizione e proprietà	15
1.8.2. Componenti cartesiane ortogonali del prodotto vettoriale	16
1.8.3. Ancora sull'espressione delle componenti del prodotto vettoriale: simbolo di Levi-Civita	17
1.8.4. Aspetti singolari del prodotto vettoriale: vettori polari e vettori assiali ..	17
1.9. Prodotto misto	19
1.9.1. Definizione	19
1.9.2. Significato geometrico del prodotto misto. Invarianza	19
1.9.3. Complanare di tre vettori	21
1.9.4. Rappresentazione cartesiana del prodotto misto	21
1.10. Doppio prodotto vettoriale	21
1.10.1. Definizione. Non associatività	21
1.10.2. Identità notevoli per il doppio prodotto vettoriale	22

Capitolo 2 - OPERAZIONI MATRICIALI SU VETTORI

2.1. L'operatore matriciale: suo carattere invariante	25
2.1.1. Rappresentazione di un operatore in una base assegnata	25
2.1.2. Operatore trasposto	26
2.1.3. Prodotto di due operatori	27
2.1.4. Non commutatività del prodotto	27
2.1.5. Operatore inverso	27
2.1.6. Operatore identità	28
2.1.7. Operatore complementare e calcolo dell'operatore inverso	29
2.1.8. Singularità di un operatore	30
2.1.9. Sistemi di equazioni lineari	30
2.1.10. Alcune identità notevoli del calcolo matriciale	31
2.1.11. Operatori simmetrici ed antisimmetrici	33
2.1.12. Vettore duale associato ad un operatore antisimmetrico	35
2.1.13. Espressione di un operatore come somma di un operatore simmetrico e di uno antisimmetrico	36
2.1.14. Traccia di un operatore	37
2.2. Operatori di rotazione e proprietà	38
2.3. Prodotto tensoriale e proprietà	39
2.4. Autovalori ed autovettori di un operatore. Direzioni unite	40
2.5. Polinomio caratteristico di un operatore	41
2.6. Diagonalizzazione di una matrice simmetrica	42
2.7. Invarianti principali di una matrice	44

2.8. Operatori definiti di segno	44
2.9. Autovalori ed autovettori di un operatore di rotazione	46
2.10. Autovalori ed autovettori del prodotto tensoriale	47
2.11. Rappresentazione di un operatore rispetto ad una base assegnata	48
2.12. Trasformazioni di similitudine	49
2.13. Potenze di una matrice	51
2.13.1. Relazione di Hamilton-Cailey	51
2.14. Espressione di un operatore come prodotto di una dilatazione e di un operatore di rotazione	52

Capitolo 3 - VETTORI APPLICATI

3.1. Definizione	55
3.1.1. Notazione per i vettori	55
3.2. Momento polare	56
3.2.1. Invarianza del momento al variare del vettore lungo la sua retta di applicazione	57
3.2.2. Vettori applicati a rette	57
3.2.3. Momento polare di un sistema di v.a.	57
3.3. Legge di distribuzione del momento	58
3.3.1. Vettori caratteristici di un Σ_a	58
3.3.2. Invariante	58
3.3.3. Invarianza del componente del momento nella direzione di $\mathbf{R}$	59
3.4. Asse centrale di un Σ_a	60
3.4.1. I dimostrazione	60
3.4.2. II dimostrazione	62
3.4.3. Equazione cartesiana dell'asse centrale	63
3.4.4. Osservazione sull'eq. vettoriale $\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} = \mathbf{b}$	64
3.5. Momento assiale	64
3.6. Teorema di Varignon: sistemi di v.a. incidenti	65
3.7. Coppia di vettori applicati	65
3.8. Operazioni elementari su Σ_a	66
3.9. Sistemi equivalenti	67
3.9.1. Definizione	67
3.9.2. Riduzione di un Σ_a a tre vettori applicati in tre punti prefissati	67
3.9.3. Riduzione di un Σ_a a due vettori applicati di cui uno in un punto prefissato P_1	67
3.9.4. Riduzione di un Σ_a ad un vettore applicato in un punto P prefissato e una coppia	69

VIII

3.9.5. Teorema di equivalenza	69
3.9.6. Riducibilità a sistemi semplici: scelta «ottimale» del polo	70
3.10. Sistemi di vettori applicati piani	71
3.10.1. Poligono funicolare	72
3.11. Sistemi di vettori applicati paralleli	73
3.11.1. Centro di un Σ_p	76