

valeriano comincioli

analisi numerica
metodi
modelli
applicazioni

McGraw-Hill Libri Italia srl

McGraw-Hill • New York • St. Louis • San Francisco • Chicago • City • Auckland
Bogotá • Caracas • Lima • London • Madrid • Montreal • New Delhi
Paris • San Juan • São Paulo • Singapore • Sydney • Tokyo • Toronto

Indice

| | |
|---|-------------|
| Introduzione | xiii |
| 1 Alcune idee di base | 1 |
| 1.1 Analisi numerica | 1 |
| 1.1.1 Scopo dell'analisi numerica | 1 |
| 1.1.2 Brevi note storiche | 4 |
| 1.2 Principi di fondo | 5 |
| 1.2.1 Iterazione | 6 |
| 1.2.2 Approssimazione locale | 9 |
| 1.3 Brevi richiami di analisi funzionale | 12 |
| 1.3.1 Spazi lineari | 12 |
| 1.3.2 Norme | 14 |
| 1.3.3 Norma di vettore | 15 |
| 1.3.4 Norma di matrice | 17 |
| 1.3.5 Spazi a dimensione infinita | 22 |
| 1.3.6 Trasformazioni e operatori | 24 |
| 1.3.7 Importanza della scelta della norma | 27 |
| 1.4 Classificazione dei problemi computazionali | 28 |
| 2 Analisi degli errori | 31 |
| 2.1 Sorgenti di errore | 32 |
| 2.2 Rappresentazione dei numeri sul calcolatore | 33 |
| 2.2.1 Rappresentazione dei numeri in differenti basi | 33 |
| 2.2.2 Conversione della rappresentazione di un numero reale | 35 |
| 2.2.3 Numeri macchina; sistema floating-point | 37 |
| 2.2.4 Operazione di arrotondamento | 40 |
| 2.2.5 Aritmetica in virgola mobile | 41 |
| 2.3 Propagazione degli errori | 45 |
| 2.3.1 Esempi di problemi malcondizionati | 47 |
| 2.3.2 Instabilità di certi algoritmi | 50 |
| 2.3.3 Analisi degli errori | 51 |
| 2.3.4 Tecniche di controllo degli errori | 57 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.4 | Complessità computazionale | 65 |
| 2.4.1 | Sistemi lineari | 65 |
| 2.4.2 | Calcolo del valore di un polinomio in un punto | 68 |
| 2.4.3 | Trasformata rapida di Fourier(FFT) | 69 |
| 2.4.4 | Conclusione | 75 |
| 3 | Approssimazione di funzioni | 76 |
| 3.1 | Interpolazione | 77 |
| 3.1.1 | Interpolazione polinomiale | 78 |
| 3.1.2 | Interpolazione di Hermite | 80 |
| 3.1.3 | Problema generale di interpolazione lineare | 82 |
| 3.1.4 | Costruzione del polinomio di interpolazione | 84 |
| 3.1.5 | Algoritmo di Neville | 85 |
| 3.1.6 | Formula di interpolazione di Newton. Differenze divise | 87 |
| 3.1.7 | Studio dell'errore di interpolazione; stabilità e convergenza | 90 |
| 3.1.8 | Rappresentazione dell'errore | 92 |
| 3.1.9 | Interpolazione mediante funzioni razionali | 100 |
| 3.1.10 | Interpolazione inversa | 103 |
| 3.1.11 | Funzioni spline | 104 |
| 3.2 | Migliore approssimazione | 116 |
| 3.2.1 | Caso hilbertiano. Polinomi ortogonali | 119 |
| 3.2.2 | Migliore approssimazione uniforme | 121 |
| 3.3 | Derivazione numerica | 129 |
| 3.3.1 | Esempi specifici | 131 |
| 3.3.2 | Studio dell'errore | 131 |
| 4 | Integrazione numerica | 133 |
| 4.1 | Formule elementari e composte | 134 |
| 4.1.1 | Formule di interpolazione | 135 |
| 4.1.2 | Studio della convergenza | 140 |
| 4.1.3 | Studio dell'errore | 143 |
| 4.2 | Formule di integrazione di Gauss | 147 |
| 4.3 | Metodi di estrapolazione | 153 |
| 4.4 | Formule adattive | 157 |
| 4.4.1 | Formula di Simpson adattiva | 158 |
| 4.5 | Formule di integrazione in più dimensioni | 162 |
| 4.5.1 | Costruzione dei metodi | 162 |
| 4.5.2 | Formule elementari su un n -simpleso T_n | 164 |
| 4.5.3 | Formule elementari su un ipercubo di dimensione n | 169 |
| 4.5.4 | Alcuni risultati di convergenza | 172 |
| 4.6 | Integrali con singolarità | 174 |
| 4.6.1 | Funzione integranda limitata | 174 |
| 4.6.2 | Funzione integranda illimitata | 174 |
| 4.6.3 | Integrali su intervalli non limitati | 177 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.6.4 | Integrali di funzioni rapidamente oscillanti | 178 |
| 5 | Sistemi lineari | 180 |
| 5.1 | Metodi diretti | 182 |
| - 5.1.1 | Sistemi triangolari | 183 |
| - 5.1.2 | Metodo di Gauss | 185 |
| - 5.1.3 | Strategia del pivot | 187 |
| - 5.1.4 | Decomposizione LU | 193 |
| - 5.1.5 | Decomposizioni LDM^T e LDL^T | 194 |
| - 5.1.6 | Matrici definite positive | 197 |
| - 5.1.7 | Matrici a banda | 199 |
| - 5.1.8 | Matrici sparse | 202 |
| 5.1.9 | Fattorizzazione incompleta | 203 |
| 5.1.10 | Condizionamento; analisi degli errori | 204 |
| 5.1.11 | Fattorizzazione $A = QR$ | 220 |
| 5.2 | Metodi iterativi | 223 |
| 5.2.1 | Metodi di Jacobi, Gauss-Seidel, rilassamento | 224 |
| 5.2.2 | Metodo per blocchi | 228 |
| 5.2.3 | Studio della convergenza | 229 |
| 5.2.4 | Accelerazione della convergenza | 241 |
| 5.3 | Metodo del gradiente coniugato | 243 |
| 5.3.1 | Metodi del gradiente | 246 |
| 5.3.2 | Metodi del gradiente coniugato | 248 |
| 5.3.3 | Precondizionamento | 252 |
| 5.3.4 | Metodo del gradiente coniugato per matrici qualunque | 255 |
| 5.4 | Metodi rapidi: Fourier e Multigrid | 257 |
| 5.4.1 | Metodo di Fourier | 257 |
| 5.4.2 | Metodi Multigrid | 259 |
| 6 | Autovalori e autovettori | 262 |
| 6.1 | Condizionamento | 262 |
| 6.1.1 | Condizionamento rispetto ad un particolare autovalore | 264 |
| 6.2 | Metodo delle potenze | 265 |
| 6.2.1 | Iterazione inversa | 267 |
| 6.2.2 | Deflazione | 267 |
| 6.2.3 | Metodo di Lanczos | 268 |
| 6.3 | Metodi per similitudine | 271 |
| 6.3.1 | Metodo di Jacobi | 272 |
| 6.3.2 | Metodo di Householder | 275 |
| 6.3.3 | Metodo di Givens | 276 |
| 6.3.4 | Matrice non simmetrica | 277 |
| 6.3.5 | Matrici tridiagonali simmetriche | 278 |
| 6.3.6 | Metodo QR | 280 |
| 6.4 | Problema degli autovalori generalizzato | 283 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 6.5 | Decomposizione SVD | 283 |
| 7 | Equazioni e sistemi non lineari | 286 |
| 7.1 | Caso unidimensionale | 288 |
| 7.1.1 | Metodo di bisezione | 288 |
| 7.1.2 | Metodo regula falsi | 293 |
| 7.1.3 | Metodo di Newton | 293 |
| 7.1.4 | Studio della convergenza del metodo di Newton | 296 |
| 7.1.5 | Metodo di Newton e radici multiple | 299 |
| 7.1.6 | Alcuni casi speciali del metodo di Newton | 300 |
| 7.1.7 | Modifiche del metodo di Newton | 301 |
| 7.2 | Teoria generale dei metodi iterativi | 305 |
| 7.2.1 | Teoremi di punto fisso | 307 |
| 7.2.2 | Aspetti computazionali: errori di arrotondamento, velocità di convergenza | 316 |
| 7.2.3 | Accelerazione della convergenza | 318 |
| 7.2.4 | Sistemi di equazioni non lineari | 322 |
| 7.3 | Radici di polinomi | 327 |
| 7.3.1 | Metodo di Lin-Bairstow | 328 |
| 7.3.2 | Sensibilità delle radici di un polinomio | 330 |
| 8 | Programmazione matematica | 334 |
| 8.1 | Elementi introduttivi | 335 |
| 8.1.1 | Posizione del problema | 335 |
| 8.1.2 | Alcuni richiami sui metodi classici di ottimizzazione | 336 |
| 8.1.3 | Alcuni richiami di analisi convessa | 340 |
| 8.2 | Elementi di programmazione lineare | 347 |
| 8.2.1 | Esempio semplice introduttivo | 347 |
| 8.2.2 | Alcune applicazioni "reali" | 349 |
| 8.2.3 | Alcuni concetti elementari in programmazione lineare | 351 |
| 8.2.4 | Ottimalità e dualità in programmazione lineare | 354 |
| 8.2.5 | Teorema del punto sella del lagrangiano | 358 |
| 8.2.6 | Variabili duali come coefficienti di sensibilità | 358 |
| 8.2.7 | Metodo del simplesso | 359 |
| 8.3 | Programmazione non lineare e convessa | 365 |
| 8.3.1 | Condizione necessaria se $f(x)$ è differenziabile | 366 |
| 8.3.2 | Condizione necessaria di Kuhn-Tucker nel caso differenziabile | 367 |
| 8.3.3 | Condizione necessaria e sufficiente di Kuhn-Tucker nel caso convesso differenziabile | 368 |
| 8.3.4 | Condizione di punto sella in programmazione convessa | 369 |
| 8.4 | Ottimizzazione non vincolata | 373 |
| 8.4.1 | Metodi diretti | 373 |
| 8.4.2 | Funzioni test | 377 |
| 8.4.3 | Ottimizzazione lungo una linea | 378 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 8.4.4 | Metodi di discesa | 384 |
| 8.5 | Ottimizzazione vincolata | 390 |
| 8.5.1 | Alcune trasformazioni elementari | 390 |
| 8.5.2 | Metodo di penalizzazione | 391 |
| 8.5.3 | Metodo del gradiente proiettato | 395 |
| 8.5.4 | Metodo SOR con proiezione | 396 |
| 8.6 | Minimi quadrati non lineari | 398 |
| 9 | Equazioni differenziali ordinarie | 402 |
| 9.1 | Elementi di teoria | 407 |
| 9.1.1 | Teoremi di esistenza | 408 |
| 9.1.2 | Teoremi di unicità | 411 |
| 9.1.3 | Dipendenza della soluzione dai dati | 414 |
| 9.1.4 | Condizionamento del problema a valori iniziali | 415 |
| 9.1.5 | Regolarità della soluzione | 418 |
| 9.2 | Introduzione ai metodi discreti | 419 |
| 9.2.1 | Metodi di sviluppo in serie | 420 |
| 9.2.2 | Metodo di Runge-Kutta | 423 |
| 9.2.3 | Metodi a più passi (multistep) | 434 |
| 9.2.4 | Metodi alle differenze all'indietro BDF | 442 |
| 9.2.5 | Metodi di estrapolazione | 445 |
| 9.3 | Convergenza e stabilità | 446 |
| 9.3.1 | Introduzione | 447 |
| 9.3.2 | Convergenza | 448 |
| 9.3.3 | Zero-stabilità | 450 |
| 9.3.4 | Massimo ordine ottenibile in un metodo LMM | 456 |
| 9.3.5 | Stabilità per h fissato | 457 |
| 9.3.6 | Regioni di assoluta stabilità | 459 |
| 9.3.7 | Stabilità forte (strong) | 461 |
| 9.3.8 | A-stabilità | 463 |
| 9.4 | Equazioni stiff | 465 |
| 9.4.1 | Risoluzione di uno schema implicito | 468 |
| 9.4.2 | Panoramica di metodi utilizzati | 469 |
| 9.4.3 | Sistemi altamente oscillatori | 470 |
| 9.5 | Problemi ai limiti | 471 |
| 9.5.1 | Metodo shooting | 476 |
| 9.5.2 | Metodi alle differenze | 482 |
| 9.5.3 | Metodi variazionali | 489 |
| 9.5.4 | Metodi spettrali | 501 |
| 9.6 | Equazioni con ritardo | 505 |
| 9.6.1 | Esistenza | 506 |
| 9.6.2 | Introduzione ai metodi numerici | 507 |

| | |
|--|------------|
| 10 Equazioni alle derivate parziali | 512 |
| 10.1 Alcune idee di base | 513 |
| 10.1.1 Approssimazione numerica | 514 |
| 10.1.2 Sistemi di equazioni differenziali | 518 |
| 10.1.3 Approssimazione numerica | 522 |
| 10.1.4 Alcuni tipi importanti di equazioni alle derivate parziali | 523 |
| 10.1.5 Tipi di equazioni e caratteristiche | 526 |
| 10.1.6 Metodi numerici basati sulle caratteristiche | 528 |
| 10.2 Equazione del calore | 528 |
| 10.2.1 Motivazione fisica | 528 |
| 10.2.2 Problema continuo | 530 |
| 10.2.3 Equazione del calore con dati iniziali e condizioni ai limiti | 534 |
| 10.2.4 Approssimazione numerica | 536 |
| 10.2.5 Studio della stabilità mediante il metodo di Fourier | 540 |
| 10.3 Elementi finiti | 542 |
| 10.3.1 Alcuni spazi di elementi finiti | 549 |
| 10.3.2 Regolarità della soluzione esatta | 559 |
| 10.3.3 Un'applicazione: problema dell'elasticità | 560 |
| 10.3.4 Numero di condizionamento della matrice di stiffness | 563 |
| 10.3.5 Elementi finiti curvi e formule di quadratura | 564 |
| 10.4 Problemi non lineari | 566 |
| 10.4.1 Problemi di filtrazione a frontiera libera | 566 |
| 10.4.2 Equazione di Burgers | 574 |
| 10.5 Studio di un problema reale | 581 |
| 10.5.1 Modello del muscolo | 582 |
| 10.5.2 Modello matematico | 583 |
| 10.5.3 Approssimazione numerica | 586 |
| 10.5.4 Validazione del modello | 586 |
| 10.5.5 Alcune varianti | 587 |
| 11 Introduzione ai problemi di controllo | 589 |
| 11.1 Esempi introduttivi | 590 |
| 11.2 Formulazione di un problema di controllo | 595 |
| 11.2.1 Legami con il calcolo delle variazioni | 597 |
| 11.2.2 Forma di un controllo ottimo | 598 |
| 11.3 Metodo della programmazione dinamica | 600 |
| 11.3.1 Programmazione dinamica discreta e principio di ottimalità | 600 |
| 11.3.2 Programmazione dinamica continua | 606 |
| 11.4 Principio del minimo di Pontryagin | 608 |
| 11.4.1 Metodo del gradiente | 613 |
| 11.4.2 Metodo di variazione degli estremali | 614 |
| 11.4.3 Metodo di penalizzazione | 615 |
| 11.4.4 Legame tra la programmazione dinamica e il principio del minimo | 615 |

| | | |
|-----------|--|------------|
| 11.4.5 | Legame con il calcolo delle variazioni classico | 616 |
| 11.4.6 | Applicazioni; modelli matematici | 616 |
| 11.5 | Identificazione di parametri | 624 |
| 11.5.1 | Posizione del problema | 624 |
| 11.5.2 | Equazioni di sensitività | 625 |
| 11.5.3 | Metodi basati sulla teoria dei controlli | 626 |
| 12 | Analisi numerica parallela | 628 |
| 12.1 | Esempi introduttivi | 629 |
| 12.2 | Sistemi di calcolo paralleli | 637 |
| 12.2.1 | Operazioni aritmetiche pipelining | 637 |
| 12.2.2 | Sistemi di calcolo parallelo e loro classificazione | 640 |
| 12.3 | Modelli e misure di complessità | 641 |
| 12.3.1 | Elementi di teoria dei grafi | 642 |
| 12.3.2 | Rappresentazione di un algoritmo parallelo mediante un grafo | 643 |
| 12.3.3 | Misure di complessità | 645 |
| 12.3.4 | Esempi | 649 |
| 12.4 | Parallelizzazione di metodi iterativi | 652 |
| 12.4.1 | Iterazioni di tipo Gauss-Seidel | 654 |
| 12.5 | Comunicazione nei sistemi paralleli | 657 |
| 12.5.1 | Alcuni tipi di topologie di networks | 659 |
| 12.6 | Sincronizzazione negli algoritmi paralleli | 661 |
| 12.6.1 | Algoritmi sincroni | 662 |
| 12.6.2 | Algoritmi asincroni | 663 |
| A | Elementi di algebra lineare | 666 |
| A.1 | Matrici. Definizioni fondamentali | 666 |
| A.1.1 | Matrici particolari | 666 |
| A.1.2 | Operazioni su matrici | 667 |
| A.1.3 | Determinante, inversa e rango | 668 |
| A.1.4 | Matrici partizionate | 671 |
| A.1.5 | Matrici elementari | 672 |
| A.1.6 | Casi particolari di matrici elementari | 672 |
| A.1.7 | Trasformazioni di Givens | 675 |
| A.2 | Sistemi lineari | 677 |
| A.3 | Autovalori e trasformazioni per similitudine | 678 |
| A.3.1 | Trasformazioni per similitudine | 679 |
| A.3.2 | Autovettori a sinistra | 680 |
| A.3.3 | Riduzione delle matrici | 680 |
| A.3.4 | Fattorizzazione unitaria di una matrice | 681 |
| A.4 | Localizzazione degli autovalori | 682 |
| A.5 | I valori singolari e la pseudo-inversa | 684 |
| A.5.1 | Decomposizione in valori singolari: SVD | 684 |
| A.5.2 | Risultati di perturbazione per i valori singolari | 687 |

| | | |
|---------------------|---|------------|
| A.5.3 | Applicazioni della SVD | 687 |
| A.5.4 | Pseudoinversa | 690 |
| A.6 | Matrici non negative | 693 |
| A.6.1 | Matrici irriducibili | 694 |
| A.6.2 | Inverse non negative; M-matrici | 695 |
| B | Polinomi | 698 |
| B.1 | Rappresentazione di un polinomio | 698 |
| B.2 | Polinomi ortogonali | 699 |
| B.3 | Polinomi di Bernstein | 705 |
| B.4 | Polinomi e numeri di Bernoulli | 707 |
| B.4.1 | Formula di Euler-Maclaurin | 708 |
| C | Equazioni alle differenze | 709 |
| C.1 | Risultati di base | 709 |
| C.1.1 | Equazioni alle differenze lineari a coefficienti costanti | 711 |
| C.1.2 | Esempi di sistemi di equazioni alle differenze | 712 |
| C.2 | Elementi di calcolo simbolico | 714 |
| D | Software numerico | 718 |
| D.1 | Programmi "mirati" | 718 |
| D.2 | Librerie | 719 |
| D.3 | Librerie di elementi finiti | 721 |
| D.4 | Librerie "generali" | 721 |
| D.5 | Software su PC | 722 |
| D.6 | Linguaggi simbolici | 722 |
| E | Introduzione a MATLAB | 724 |
| F | Introduzione agli spazi di Sobolev | 738 |
| F.1 | Richiami sulle distribuzioni | 738 |
| F.1.1 | Derivazione nel senso delle distribuzioni | 740 |
| F.2 | Spazio di Sobolev $H^1(\Omega)$ | 741 |
| F.2.1 | Alcune proprietà dello spazio $H^1(\Omega)$ | 742 |
| F.2.2 | Funzioni di $H^1(\Omega)$ "nulle" su Γ | 743 |
| F.2.3 | Un risultato di "traccia" | 744 |
| F.2.4 | Applicazioni del teorema di traccia | 745 |
| F.2.5 | Un risultato di compattezza | 746 |
| F.3 | Spazi di Sobolev $H^m(\Omega)$ | 746 |
| F.3.1 | Risultati di regolarità | 747 |
| Bibliografia | | 748 |