

Claude Dellacherie

Professeur à l'Institut de Mathématique, Université Louis Pasteur, Strasbourg

Paul-André Meyer

Directeur de recherches au Centre national de la recherche scientifique

Probabilités et potentiel

Chapitres V à VIII

ÉDITION ENTièrement REFOndue

Théorie des martingales

Hermann



Table

COMPLÉMENTS AU CHAPITRE IV : Quelques précisions sur les sauts des processus càdlàg.

xiii

CHAPITRE V . GENERALITES ET CAS DISCRET

1. Définitions et propriétés générales .

Définition des martingales et surmartingales (1-2). Propriétés immédiates (3-5). Exemples (6). Martingales et surmartingales fermées à droite ou à gauche (7).

2. Le théorème d'arrêt de Doob.

Transformée d'une martingale (8). Théorème d'arrêt (cas borné) et commentaires (9-13). Extension aux temps d'arrêt non bornés (14-18).

3. Inégalités fondamentales.

Notations (19). Le « lemme maximal » (20-23). Majoration dans L^p , $p \geq 1$ (24-25). Montées et descentes (26-27).

4. Théorèmes de convergence et décompositions.

Convergence p.s. des surmartingales (28-30) et des martingales (31-33). Décompositions du type de Riesz (34-37) et de Krickeberg (38). Martingales sur certains espaces σ -finis (39-43). Une remarque sur la convergence dans L^1 (44).

5. Quelques applications des théorèmes de convergence.

Le « lemme de Hunt » (45) et le « lemme de Borel-Cantelli de Lévy » (46). Variables aléatoires symétriques (47-52). Un théorème de Choquet et Deny (53-55). Applications à la théorie de la mesure : le théorème de Raon-Nikodym (56-57), existence de densités dépendant mesurablement d'un paramètre (58), théorème de relèvement (59-60). Un théorème de Rota (61-65) et son extension aux pseudo-noyaux (66-67). Le lemme de Calderon-Zygmund (68).

1. Surmartingales continues à droite.

72

Rappel des inégalités discrètes (1). Limites à droite et à gauche le long d'un ensemble dénombrable (2-3). Existence de modifications càdlàg (4). Régularisation sans complétion (5). Surmartingales continues à droite : extensions du cas discret (6-7) ; décompositions du type de Riesz (8-9) ; théorème d'arrêt (10-13). Propriétés spéciales au cas continu : forme prévisible du théorème d'arrêt (14-16) ; annulation des surmartingales positives (17) ; suites croissantes de surmartingales (18-19). Processus bornés dans L^1 ou de la classe (D) (20). Propriétés des processus bornés dans L^1 (21-22). Critères d'appartenance à la classe (D) (23-26). Martingales locales (27-29) ; résultats techniques (30-32). Décomposition de Krickeberg (33-36 bis). Quasimartingales (37-39). Décomposition de Rao (40-42).

2. Projections et projections duales.

113

Définition et construction des projections (43-45). Comparaison de oX et pX (46). Régularité des trajectoires d'une projection (47-50). Processus croissants (51) ; structure (52-53) ; cas des processus indexés par $[0, \infty]$ (53, a). Calculs d'intégrales de Stieltjes (54-55). Changement de temps (56). Application aux processus croissants (57-58). Caractérisation des processus croissants optionnels ou prévisibles (59-60). Processus croissants "naturels" et caractérisation des temps prévisibles (61-62). P -mesures et processus croissants intégrables (63-66). P -mesures optionnelles et prévisibles (67). Un théorème de Radon-Nikodym (68-68 bis). Un résultat d'unicité (69-70). Projections optionnelle et prévisible d'une P -mesure (71-72). Projections duales optionnelle et prévisible d'un processus croissant brut (73-75). Sante d'une projection duale (76). Compensateur prévisible d'un processus croissant optionnel (77). Caractérisation des t. d'a. totalement inaccessibles (78). Processus croissants localement intégrables (79) et leurs compensateurs (80-81). Applications aux martingales locales (82-85). Mesures aléatoires (86-88).

3. Processus croissants et potentiels

165

Potentiel et potentiel gauche engendrés par un p.c. (89). Intégration par parties (90-91) et formule du changement de variables (92-93). Calculs dans L^2 (94-96). Notions sur les fonctions de Young (97) et lemme fondamental (98). L'inégalité de Garnik-Nevai (99-100). La forme générale de l'inégalité maximale (101-104). Le cas des potentiels bornés (105-108). L'inégalité de John-Nirenberg (109). Inégalités de domination (110-113).

1. Le théorème de décomposition

200

Un lemme d'analyse fonctionnelle (1-3). Variantes (4-5). Décomposition des surmartingales positives de la classe (D) (6-9), sauts du processus croissant associé (10). Surmartingales fortes régulières (11). Décomposition des surmartingales càdlàg. quelconques (12-13) et sauts du processus croissant (14). Élimination de difficultés à l'infini (15). Intégrabilité uniforme de processus croissants associés (16). Surmartingales de la classe (D) et surmartingales bornées (17). Approximation du processus croissant associé : au sens faible (18) ou fort (19-20) ; passage du discret au continu (21) et utilisation des « laplaciens approchés » (22).

2. Définition et premières propriétés des semimartingales

231

Semimartingales et semimartingales spéciales (23-24). Caractérisations des s.m. spéciales (25). Construction de s.m. par recollement (26-27). Application aux changements de temps (28-29). Semimartingales sur $[0, \infty]$ (30). Produits de semimartingales (31-32), fonctions convexes de s.m. (33-34). Décomposition explicite du produit : un facteur à variation finie (35-38) Deux facteurs martingales locales : le crochet oblique (39-41) et le crochet droit (42-43). Extension du crochet droit aux semimartingales (44). Préservation des s.m. par changement de loi (th. de Girsanov) (45-47). Décomposition explicite (problème de Girsanov) (48-50). Caractérisation par le crochet droit des s.m. spéciales (51) et des martingales de carré intégrable (52). Inégalité de Kunita-Watanabe (53-54). Une inégalité de Stricker (55-56). Changement de loi transformant une semimartingale en quasimartingale (57-58). Application aux changements de filtration (59-61) et à un problème simple de grossissement de tribus (62-63). Complément aux nos 57-58 (63 bis).

3. Espaces H^p de semimartingales et de martingales

273

Espace H^p de processus càdlàg., sous-espace H^p ou M^p de martingales (norme maximale) (64). Dual de H^p , $p < 1$ (65-66) et $p \geq 1$ (67). Représentation de processus croissants (68-69). Dual de H^1 , première représentation (70). Lemmes concernant H^1 maximal (71-73). Dual de H^1 maximal (74-75). Espaces BMO_p (76), énoncé complet du th. de dualité (77), caractérisation de BMO (78), calcul de la dualité (79). Quelques exemples d'éléments de BMO (80). Espaces H^p quadratiques (81-82). Lemmes sur H^1 (83-85). L'inégalité de Peferman (86), variantes (87). Le dual de H^1 quadratique est BMO (88-89). Inégalité de Davis (90-91), de Burkholder-Davis-Gundy (92). Inégalités sur les compensateurs (93-95).

L'espace R^D de processus càdlàg. (96). Localisation et prélocalisation (97). Espace H^D de semimartingales, ou espace S^D ($p \geq 1$) (98). Convergence locale dans S^D (99). L'espace R^D des semimartingales jusqu'à l'infini (100), et la topologie des semimartingales (101-103). Compléments utilisant l'intégrale stochastique (104-105).

CHAPITRE VIII . INTEGRALES STOCHASTIQUES, STRUCTURE DES MARTINGALES

325

1. Intégrale stochastique de processus prévisibles localement bornés

325

Notations pour les l.s. élémentaires (1-2). Le théorème fondamental de construction de l'i.s. (3-6). Commentaire (7). Extension aux processus prévisibles localement bornés (8-11). Invariance par changement de loi (12), et de filtration (13). Un théorème de convergence dominée (14). Application aux « séries de Riemann » (15) et à la théorie du crochet droit (16-17). Formules d'intégration par parties (18-19). Invariance du crochet droit par changement de loi (20-21). Crochet droit et l.s. (22). Caractère local de l'i.s. (23-24). La formule du changement de variables (25-28) et la formule de Tanaka (29).

2. Structure des martingales et martingales locales

354

Retour sur les martingales de carré intégrable : caractérisation de l'i.s. au moyen du crochet droit (30-31). L'i.s. compensée (32-35). Extension aux martingales locales (36-40). Orthogonalité de martingales locales (41). Sommes compensées de sauts et décomposition d'une martingale locale (42-44). Partie martingale continue d'une semimartingale (45). Sous-espaces stables de H^2 (46-48). Théorème de projection dans H^2 (49-52). Quelques exemples (53-54). Sous-espaces stables dans H^1 (55-56). Lois extrémales et représentation * prévisible (57-58). Le cas du mouvement brownien (59-63). Processus dépendant d'un paramètre et mesures aléatoires (64), théorème de projection de mesures (65-66). Application aux processus ponctuels (67). Décomposition de Lévy d'une martingale locale (68).

3. Deux extensions de la notion d'intégrale stochastique

391

Intégrales stochastiques non compensées de processus optionnels (69-73). Intégrales de processus prévisibles non localement bornés (74-77). L.s. vectorielles et sous-espaces stables dans H (78).

4. Une caractérisation des semimartingales

400

Le théorème principal : énoncé et préliminaires (79-81). Réduction à un théorème d'analyse fonctionnelle (82). Démonstration de celui-ci (83-85).

Définition des martingales et surmartingales fortes optionnelles (1) et prévisibles (2). Quelques inégalités (3). Existence de limites à droite et à gauche (4-5). Les théorèmes de projection sans conditions habituelles (6-8). Deux applications (9-10). Projections duales (11-12). Régularité et continuité à droite en espérance (13). Temps d'arrêt divisés (14) et extension du théorème d'arrêt (15) et des inégalités liant processus croissants et potentiels (16-19). Décomposition de Martens (20-21). Enveloppe de Snell (22-23). Caractérisation des processus de la classe (D) (24-25).

Fonctions convexes et quasimartingales (1). Une autre expression de la variation (2-3). Quasimartingales de la classe (D) et décomposition (4). Quasimartingales et mesures simplement additives (5).