

Fabio Bagarello

# Metodi matematici per fisici e ingegneri



**MATEMATICA ZANICHELLI**

# Indice

<b>Prefazione e ringraziamenti</b>	<b>vii</b>
<b>1 Funzioni analitiche</b>	<b>1</b>
1.1 Richiami sui numeri complessi . . . . .	1
1.2 Funzioni complesse di variabili complesse . . . . .	4
1.3 Funzioni analitiche . . . . .	6
1.4 Integrazione nel campo complesso . . . . .	11
1.5 Teorema di Cauchy e funzioni primitive . . . . .	15
1.6 Formula integrale di Cauchy e sue conseguenze . . . . .	22
1.7 Serie di funzioni e serie di Taylor . . . . .	26
1.8 Serie di Laurent . . . . .	32
1.9 Residui . . . . .	38
1.10 Lemma di Jordan ed applicazioni . . . . .	47
1.11 Parte principale di un'integrale . . . . .	55
1.12 Sommazioni . . . . .	59
1.13 Metodo del punto a sella . . . . .	62
<b>2 Spazi di Hilbert e segnali</b>	<b>66</b>
2.1 Introduzione . . . . .	66
2.2 Misura ed integrale di Lebesgue . . . . .	66
2.3 Il teorema della convergenza dominata . . . . .	77
2.4 Spazi di Hilbert . . . . .	81
2.5 Sistemi completi di vettori . . . . .	90
2.6 Polinomi ortogonali: teoria . . . . .	102
2.6.1 Formula di Rodriguez . . . . .	106
2.7 Polinomi ortogonali: esempi . . . . .	112
2.7.1 Caso (i): $\text{mis}(b - a) < \infty$ . . . . .	112
2.7.2 Caso (ii): $a = 0$ e $b = \infty$ . . . . .	116
2.7.3 Caso (iii): $a = -\infty$ e $b = \infty$ . . . . .	117
2.8 Segnali . . . . .	118
2.9 Spazi di Banach . . . . .	125
2.10 Ancora sugli spazi $\mathcal{L}^p$ ed $l^p$ . . . . .	129
2.10.1 Spazi $\mathcal{L}^p$ . . . . .	129
2.10.2 Spazi $l^p$ . . . . .	134
<b>3 Operatori limitati</b>	<b>139</b>
3.1 Operatori lineari . . . . .	139
3.2 Operatori su spazi di Hilbert . . . . .	148
3.3 Topologie su $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ . . . . .	162
3.4 Spettro di un operatore . . . . .	170
3.5 Altre classi di operatori limitati . . . . .	178

3.5.1	Operatori positivi, radici quadrate e decomposizione polare	178
3.5.2	Operatori compatti	185
3.5.3	Operatori di classe traccia e Hilbert-Schmidt	188
3.6	Un breve cenno sugli operatori illimitati	194
3.7	Alcune formule utili	203
3.8	Alcune disequaglianze, operatoriali e non	209
3.9	Principio di indeterminazione di Heisenberg	212
3.10	Breve introduzione al teorema spettrale	214
<b>4</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>220</b>
4.1	La serie di Fourier in $\mathcal{L}^2(-\pi, \pi)$	220
4.2	Alcuni esempi	224
4.2.1	Primo esempio: la funzione segno	224
4.2.2	Segnale dente di sega	227
4.2.3	L'onda triangolare	228
4.3	Forma complessa della serie di Fourier	231
4.4	Altri tipi di convergenza	233
4.4.1	Qualche risultato generale sulle successioni di funzioni	234
4.4.2	Applicazioni allo sviluppo di Fourier	238
<b>5</b>	<b>Trasformata di Fourier</b>	<b>246</b>
5.1	Approccio formale	246
5.1.1	La trasformata in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$	246
5.1.2	La trasformata in $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$	251
5.2	Alcuni esempi notevoli	257
5.3	Genesi euristica della trasformata	260
5.4	Proprietà della trasformata di Fourier	264
5.5	Applicazione alle equazioni differenziali	270
<b>6</b>	<b>Trasformata di Laplace</b>	<b>272</b>
6.1	Definizione e prime considerazioni	272
6.2	Antitrasformata di Laplace	275
6.3	Proprietà della trasformata di Laplace	282
6.4	Applicazione alle equazioni differenziali	283
<b>7</b>	<b>Distribuzioni: cenni</b>	<b>286</b>
7.1	Prime osservazioni euristiche	286
7.2	Un po' più di rigore	290
7.2.1	Gli spazi $\mathcal{D}$ ed $\mathcal{S}$	290
7.2.2	Funzionali su uno spazio di Hilbert	292
7.2.3	Distribuzioni	295
7.3	Derivata di una distribuzione	300
7.4	Proprietà della $\delta(x)$	303
7.4.1	Ulteriori caratteristiche della $\delta(x)$	305
7.5	Alcune applicazioni	307
7.6	Un esempio interessante: $\mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right)$	308
7.7	Trasformata di Fourier e distribuzioni	312
7.8	Qualche informazione sul prodotto di convoluzione	313

<b>8</b>	<b>Frame, wavelet ed analisi di multi-risoluzione</b>	<b>319</b>
8.1	Introduzione e stati coerenti . . . . .	319
8.2	Completezza degli autostati dell'oscillatore armonico . . . . .	326
8.3	Frame . . . . .	328
8.3.1	Una generalizzazione . . . . .	333
8.4	Completezza e biortogonalità . . . . .	336
8.4.1	Basi di Riesz . . . . .	340
8.4.2	Basi di Schauder . . . . .	342
8.5	Wavelet . . . . .	349
8.5.1	La trasformata wavelet continua . . . . .	352
8.5.2	Trasformata wavelet discreta . . . . .	356
8.6	Basi o.n. di wavelet: MRA . . . . .	360
8.7	Ulteriori considerazioni ed esempi . . . . .	373
<b>A</b>	<b>Esercizi d'esame svolti</b>	<b>382</b>
A.1	Funzioni analitiche . . . . .	382
A.2	Spazi di Hilbert . . . . .	386
A.3	Operatori . . . . .	389
A.4	Serie di Fourier . . . . .	393
A.5	Trasformata di Fourier . . . . .	395
A.6	Trasformata di Laplace . . . . .	399
A.7	Distribuzioni . . . . .	401
A.8	Equazioni differenziali . . . . .	403
<b>B</b>	<b>Equazioni differenziali ordinarie</b>	<b>406</b>
B.1	Introduzione . . . . .	406
B.2	Sul problema di Cauchy . . . . .	408
B.3	Alcune classi particolari di <i>Edo</i> . . . . .	415
B.3.1	Equazioni a variabili separabili . . . . .	415
B.3.2	Equazioni lineari del primo ordine . . . . .	417
B.3.3	<i>Edo</i> che ammettono soluzione parametrica . . . . .	419
B.3.4	<i>Edo</i> esatte . . . . .	421
B.4	Equazioni differenziali lineari . . . . .	424
B.4.1	L'equazione omogenea . . . . .	424
B.4.2	L'equazione completa . . . . .	428
B.5	Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti . . . . .	432
B.6	Altri metodi di risoluzione . . . . .	435
B.6.1	Risoluzione per serie . . . . .	435
B.6.2	Metodo matriciale . . . . .	437
B.6.3	La funzione di Green . . . . .	438
	<b>Bibliografia</b>	<b>441</b>
	<b>Indice analitico</b>	<b>444</b>