

86234

ALCUNI ASPETTI MATEMATICI DELLA MECCANICA QUANTISTICA

Sandro Graffi

Dipartimento di Matematica, Università di Bologna

Indice

I	Nozioni fondamentali sugli operatori di Schrödinger	9
1	Richiami sugli operatori continui negli spazi di Banach	11
1.1	Generalità ed esempi	11
1.2	Operatori compatti	18
2	Generalità sugli operatori non limitati	20
2.1	Operatori chiusi	23
2.2	L'operatore aggiunto	25
2.3	Stabilità della chiusura	27
3	Definizioni fondamentali della teoria spettrale	29
3.1	L'operatore risolvente. Lo spettro	29
3.2	Esempi di risolventi	30
3.3	Proprietà del risolvente. La serie di Neumann	33
4	Operatori simmetrici e autoaggiunti	37
4.1	Le nozioni di simmetria e autoaggiunzione	37
4.2	Caratterizzazioni dell'autoaggiunzione	39
5	Operatori autoaggiunti e famiglie spettrali	42
5.1	La risoluzione dell'identità e la misura spettrale	42
5.2	Il teorema spettrale per gli operatori autoaggiunti	45
6	Alcuni richiami di meccanica analitica	49
6.1	Formalismo canonico	50
6.2	Il metodo di Jacobi	52
7	Cenno sui principi della meccanica quantistica.	54
7.1	I: gli stati, le grandezze fisiche, la misura	54
7.2	II: le equazioni di Heisenberg, l'equazione di Schrödinger	57
8	Quantizzazione: algebra di Weyl-Heisenberg	62

8.1	Quantizzazione degli osservabili	65
8.2	Espressioni dei generatori nella rappresentazione di Schrödinger .	66
8.3	La funzione di Wigner	67
8.4	Il simbolo di Weyl	69
8.5	Proprietà fondamentali della quantizzazione di Weyl	71
9	La rappresentazione di Bargmann, quantizzazione di Wick	74
9.1	Variabili canoniche complesse	74
9.2	Quantizzazione: la rappresentazione di Bargmann delle relazioni di commutazione canoniche	75
9.3	Vettori principali=vettori di Poisson=nucleo autoriproducente=stati coerenti	77
9.4	Quantizzazioni di Weyl, Wick, antiWick e loro relazioni	79
10	L'operatore di Schrödinger: l'autoaggiunzione	82
10.1	Il caso unidimensionale	82
10.2	Un esempio esplicito: l'oscillatore armonico	86
10.3	Stabilità dell'autoaggiunzione: il teorema di Rellich-Kato	89
10.4	Applicazione all'operatore di Schrödinger a due corpi	91
10.5	L'operatore di Schrödinger dell'effetto Zeeman	92
10.6	Un altro esempio esplicito: i livelli di Landau	94
11	L'operatore di Schrödinger: teoria spettrale	96
11.1	Classificazioni dello spettro di un operatore autoaggiunto	96
11.2	Relativa compattezza e stabilità dello spettro essenziale	99
11.3	Operatori di Schrödinger con spettro discreto	101
12	Teoria delle perturbazioni degli autovalori	104
12.1	Il proiettore come integrale sul risolvente	105
12.2	Famiglie olomorfe di operatori /	108
12.3	Perturbazioni regolari e convergenza della serie delle perturbazioni	109
12.4	La serie formale delle perturbazioni nel caso non degenere	112
13	Teoria della diffusione	115
13.1	Localizzazione, delocalizzazione e spettro: il teorema di Ruelle .	115
13.2	Definizioni fondamentali: gli operatori d'onda, la matrice S	117
13.3	Il metodo di Cook. Applicazione all'operatore di Schrödinger . .	120

II Costruzione della forma normale quantistica	123
14 Operatori pseudodifferenziali semiclassici	125
14.1 Digressione tecnica: nucleo distribuzionale, integrali oscillanti	125
14.2 Operatori pseudodifferenziali	127
14.3 Operatori integrali di Fourier	131
14.4 Composizione dei simboli e prodotti di operatori pseudodifferenziali	133
14.5 La convoluzione ritorta e la parentesi di Moyal nello spazio di Fourier	135
14.6 Il teorema di Egorov semiclassico	136
14.7 Proprietà degli operatori pseudodifferenziali negli spazi di Hilbert: continuità, compattezza	138
14.8 Ellitticità, il risolvente, la parametrice	139
14.9 Proprietà caratteristiche della quantizzazione di Weyl	141
14.10 Quantizzazioni di Weyl, Wick e antiWick	143
14.11 Insieme delle frequenze semiclassico, stime degli autovettori microlocali e locali	146
15 Teoria delle perturbazioni uniforme	149
15.1 Posizione del problema	149
15.2 Lo sviluppo di Lie-Moyal	151
15.3 Teoria delle perturbazioni	152
15.4 L'equazione omologica	153
15.5 Espressioni esplicite per i termini di perturbazione all'ordine k e per il resto	156
15.6 Sulla soluzione dell'equazione omologica	156
15.7 Integrazione dell'equazione omologica	159
15.8 Riassunto: forme normali classiche e quantistiche	160
15.9 Teoria delle perturbazioni quantistica non degenera	162
16 Una formula di quantizzazione con stima del resto	165
16.1 Spazi normati di funzioni analitiche	165
16.2 Stima della soluzione dell'equazione omologica	166
16.3 Stima della parentesi di Moyal	167
16.4 Le stime ricorrenti	169

16.5	Stima dei termini individuali e del resto	170
16.6	Troncamento ottimale ed errori esponenzialmente piccoli	172
17	Formule di quantizzazione per i sistemi non integrabili	174
17.1	Il caso integrabile e la scelta delle variabili d'azione	174
17.2	Il caso non integrabile: quantizzazione della forma normale	177