

Piero de Mottoni

*Complementi di matematica*



# INDICE

<b>Capitolo 1. FUNZIONI COMPLESSE DI UNA VARIABILE COMPLESSA</b>	13
1.1. Funzioni complesse di variabile reale	14
1.2. Alcune classi notevoli di funzioni complesse di variabile complessa	14
1.2.1. Funzioni lineari	14
1.2.2. Funzioni quadratiche	16
1.2.3. La funzione "potenza $n$ -esima"	18
1.2.4. La funzione esponenziale complessa	18
1.3. Funzioni iniettive e loro inverse	18
1.3.1. Inversione di $f(z) = z^2$	19
1.3.2. Inversione di $f(z) = z^n$	21
1.3.3. Il logaritmo complesso e le potenze generalizzate	21
1.4. La funzione di Jukowski	23
1.4.1. Inversione della funzione di Jukowski	26
1.5. Le funzioni trigonometriche complesse	27
1.6. Il punto all'infinito	29
 <b>Capitolo 2. SOTTOINSIEMI DEL PIANO COMPLESSO, SUCCESSIONI, SERIE</b>	 31
2.1. Insiemi di punti nel campo complesso	31
2.2. Successioni nel campo complesso	32
2.3. Serie nel campo complesso	32
2.4. Criteri di convergenza assoluta	33
2.5. Serie doppie	35
2.6. Prodotto di serie	38
2.7. Serie di funzioni e serie di potenze	38
2.8. Operazioni con le serie di potenze	41
2.9. Cenni sul comportamento di una serie di potenze sulla circonferenza del cerchio di convergenza	44
 <b>Capitolo 3. FUNZIONI OLOMORFE</b>	 45
3.1. Derivabilità in senso complesso	45
3.2. Funzioni olomorfe e funzioni armoniche	51
3.3. Esempi di funzioni olomorfe	52
3.4. Proprietà elementari delle funzioni olomorfe	54
3.5. Interpretazione geometrica della derivabilità complessa	56
3.6. Trasformazioni conformi	59

<b>Capitolo 4. L'USO DELLE TRASFORMAZIONI CON-</b>	
<b>FORMI NELLA SOLUZIONE DI PROBLE-</b>	
<b>MI DI POTENZIALI PIANI</b>	63
4.1. Trasformazione conforme di un potenziale	63
4.2. Applicazioni	65
<b>Capitolo 5. I TEOREMI INTEGRALI DI CAUCHY</b>	77
5.1. Integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa	77
5.2. Il teorema integrale di Cauchy	84
5.3. Una semplice applicazione del teorema integrale di Cauchy	91
5.4. Il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni olomorfe	94
5.5. Il teorema di rappresentazione di Cauchy e sue prime conseguenze	96
5.6. Calcolo di integrali curvilinei nel piano complesso;	
5.6.1. Il Lemma di Jordan	104
5.6.2. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$	104
5.7. La formula integrale di Cauchy per le derivate successive di una funzione olomorfa; il teorema di Morera	108
<b>Capitolo 6. FUNZIONI OLOMORFE E SERIE DI PO-</b>	
<b>TENZE</b>	113
6.1. Serie di funzioni olomorfe e serie di potenze	113
6.2. Svilupabilità in serie di potenze di funzioni olomorfe; sviluppi di Taylor	115
6.2.1. Esempi di sviluppi in serie di Taylor	117
6.3. Olomorfia all'infinito e sviluppi di Taylor nell'intorno dell'infinito	120
6.4. Il teorema di Liouville	121
6.5. Serie doppie	123
<b>Capitolo 7. IDENTITÀ DI FUNZIONI OLOMORFE; PROLUNGAMENTI ANALITICI; FUNZIONI ANALITICHE COMPLETE</b>	127
<b>POLIDROME E MONODROME</b>	127
7.1. Identità per serie di potenze e per funzioni olomorfe	127
7.2. Il principio del prolungamento analitico	130
7.2.1. Calcolo dei coefficienti di Taylor di elementi analitici "successivi"	138
7.2.2. Il teorema di Pringsheim e sue conseguenze	138
7.3. Prolungamento analitico lungo curve. Il logaritmo complesso	141
7.3.1. Prolungamento lungo curve	141
7.3.2. La funzione $\ln z$	142
7.4. Punti di diramazione	148
7.5. Il teorema di monodromia	150
7.6. Conseguenze del teorema di monodromia. Rami olomorfi di funzioni analitiche	151
7.7. Rami olomorfi di funzioni analitiche complete in dominii non semplicemente internamente connessi	154
<b>Capitolo 8. SINGOLARITÀ ISOLATE DI FUNZIONI OLOMORFE</b>	161
8.1. La serie di Laurent	161
8.1.1. Raggi di Convergenza della serie di Laurent	164
8.1.2. Unicità della serie di Laurent; esempi	164
8.2. Serie di Laurent e serie di Fourier	168
8.3. Singolarità isolate	170
8.3.1. Singolarità eliminabili	172
8.3.2. Poli	173
8.3.3. Singolarità essenziali	174
8.4. Serie di Laurent e parte principale di una funzione olomorfa nei pressi di una singolarità isolata	175
8.5. Calcolo dei Residui	179
8.5.1. Caso di un polo del primo ordine	180
8.5.2. Il residuo in un polo di ordine $n$	181
8.5.3. Applicazioni del teorema dei residui	182
8.6. Comportamento all'infinito di funzioni olomorfe.	
Il residuo all'infinito	183
8.7. La derivata logaritmica e l'indicatore logaritmico	185
8.7.1. Interpretazione geometrica dell'indicatore logaritmico	188
8.8. La serie di Bürmann-Lagrange	191
8.8.1. Applicazioni della serie di Bürmann-Lagrange	193

8.8.2. L'inversione di serie di potenze mediante la serie di Bürmann-Lagrange . . . . .	194
<b>Capitolo 9. INTEGRALI IMPROPRI REALI CALCOLATI MEDIANTE IL TEOREMA DEI RESIDUI . . . . .</b>	<b>197</b>
9.1. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixx} R(x) dx$ . . . . .	197
9.2. Il valore principale di Cauchy . . . . .	199
9.3. Integrali di funzioni periodiche . . . . .	201
9.4. $\int_{-\infty}^{\infty} R(e^x) e^{\alpha x} dx$ ( $0 < \alpha < 1$ ) . . . . .	202
9.5. $\int_0^{\infty} x^{-\alpha} R(x) dx$ ( $0 < \alpha < 1$ ) . . . . .	204
9.6. $\int_0^{\infty} \frac{R(x)}{x^{\alpha}} dx$ con $R$ avente poli semplici su $\mathbb{R}^+$ . . . . .	207
9.7. $\int_0^{\infty} R(x) \log x dx$ . . . . .	209
9.8. Cambiamento di variabili e teorema dei residui . . . . .	210
9.9. Integrali estesi ad archi di curva in $\mathbb{C}$ . Integrali del tipo $\int_0^{\infty} R(x) dx$ . . . . .	213
9.10. Uso del calcolo dei Residui per trovare la somma di serie numeriche . . . . .	217
<b>Capitolo 10. LE FUNZIONI <math>\Gamma</math> E <math>B</math> DI EULERO . . . . .</b>	<b>219</b>
10.1. Richiami sugli integrali impropri uniformemente convergenti . . . . .	219
10.2. La funzione $\Gamma$ di Euler . . . . .	220
10.2.1. La funzione $\Gamma$ e l'integrale di Gauss . . . . .	222
10.3. La funzione $B$ di Euler . . . . .	222
10.4. Formula dei complementi . . . . .	224
<b>Capitolo 11. TRASFORMATA DI LAPLACE . . . . .</b>	<b>227</b>
11.1. Trasformata di Laplace e sua inversa . . . . .	227
11.2. Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	235
11.3. Teoremi di convoluzione . . . . .	241
11.4. Teoremi di sviluppo . . . . .	242
11.5. La trasformata di Laplace di potenze generalizzate . . . . .	247
11.6. Applicazioni del teorema di convoluzione . . . . .	247
11.7. Un'applicazione della trasformata di Laplace all'equazione di Bessel . . . . .	249
11.8. La trasformata di Laplace bilatera e la trasformata di Mellin . . . . .	250
11.9. Gli integrali di Lipschitz e Weber . . . . .	254

<b>Capitolo 12. CENNI DI TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI . . . . .</b>	<b>255</b>
12.1. Introduzione . . . . .	255
12.2. Derivata di distribuzioni . . . . .	259
12.3. Funzioni a decrescenza rapida e distribuzioni temperate . . . . .	261
12.4. Trasformata di Laplace di distribuzioni . . . . .	262
<b>Capitolo 13. POLINOMI DI LEGENDRE E EQUAZIONE DI LEGENDRE . . . . .</b>	<b>265</b>
13.1. Polinomi di Legendre . . . . .	265
13.2. L'equazione differenziale di Legendre . . . . .	267
13.3. Funzioni di Legendre (armoniche sferiche di secondo tipo) . . . . .	269
13.4. Una rappresentazione esplicita dei polinomi di Legendre: la formula di Rodrigues . . . . .	270
13.5. Ortogonalità dei polinomi di Legendre . . . . .	271
<b>Capitolo 14. FUNZIONI DI BESSEL . . . . .</b>	<b>273</b>
14.1. Osservazione sul prodotto di serie assolutamente convergenti: il prodotto "antidiagonale" . . . . .	273
14.2. Funzioni di Bessel . . . . .	274
14.3. L'equazione differenziale di Bessel . . . . .	277
14.4. L'equazione della membrana e l'equazione di Bessel . . . . .	279
14.5. Funzioni di Bessel di secondo tipo . . . . .	280
14.6. Un'equazione ritroducibile a un'equazione di Bessel . . . . .	282
14.7. Un'applicazione delle funzioni di Bessel . . . . .	283
<b>Capitolo 15. TRASFORMATA DI FOURIER . . . . .</b>	<b>287</b>
15.1. Serie di Fourier . . . . .	287
15.2. Teoremi di convergenza per la serie di Fourier . . . . .	288
15.3. La trasformata di Fourier . . . . .	289
15.4. Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	290
15.5. Trasformata di Fourier: esempi . . . . .	291
15.6. Trasformata di Fourier di "Funzioni" singolari . . . . .	293
15.7. Trasformata di Fourier e serie di Fourier . . . . .	296
15.8. Serie di Fourier troncate . . . . .	299
15.9. Somme di Fejér . . . . .	300
15.10. Il teorema di campionamento (Sampling theorem) . . . . .	301
15.11. Trasformate di Fourier bidimensionale e trasformate di Hankel . . . . .	303

<b>Capitolo 16. EQUAZIONE DEL CALORE E LA SUA TRATTAZIONE CON IL METODO DI FOURIER</b>	
16.1. Equazione del calore . . . . .	309
16.2. Il metodo di Fourier . . . . .	311
<b>Capitolo 17. TRASFORMATA Z . . . . .</b>	
17.1. Definizione e proprietà basilari . . . . .	321
17.2. Esempi di trasformate Z . . . . .	321
17.3. Inversione della trasformata Z . . . . .	322
17.4. Ulteriori proprietà della trasformata Z . . . . .	325
17.5. Uso della trasformata Z per la risoluzione di equazioni alle differenze . . . . .	338
<b>Capitolo 18. LA TRASFORMATA DI FOURIER DISCRETA . . . . .</b>	
18.1. Introduzione . . . . .	341
18.2. Proprietà della DFT . . . . .	342