

Piero de Motroni

*Complementi di matematica*



# INDICE

## Capitolo 1. FUNZIONI COMPLESSE DI UNA VARIABILE COMPLESSA

1.1. Funzioni complesse di variabile reale	13
1.2. Alcune classi notevoli di funzioni complesse di variabile complessa	14
1.2.1. Funzioni lineari	14
1.2.2. Funzioni quadratiche	16
1.2.3. La funzione "potenza $n$ -esima"	18
1.2.4. La funzione esponenziale complessa	18
1.3. Funzioni iniettive e loro inverse	18
1.3.1. Inversione di $f(z) = z^2$	19
1.3.2. Inversione di $f(z) = z^n$	21
1.3.3. Il logaritmo complesso e le potenze generalizzate	21
1.4. La funzione di Jukowski	23
1.4.1. Inversione della funzione di Jukowski	26
1.5. Le funzioni trigonometriche complesse	27
1.6. Il punto all'infinito	29

## Capitolo 2. SOTTOINSIEMI DEL PIANO COMPLESSO, SUCCESIONI, SERIE

2.1. Insiemi di punti nel campo complesso	31
2.2. Successioni nel campo complesso	32
2.3. Serie nel campo complesso	32
2.4. Criteri di convergenza assoluta	33
2.5. Serie doppie	35
2.6. Prodotto di serie	38
2.7. Serie di funzioni e serie di potenze	38
2.8. Operazioni con le serie di potenze	41
2.9. Cenni sul comportamento di una serie di potenze sulla circonferenza del cerchio di convergenza	44

## Capitolo 3. FUNZIONI OLOMORFE

3.1. Derivabilità in senso complesso	45
3.2. Funzioni olomorfe e funzioni armoniche	51
3.3. Esempi di funzioni olomorfe	52
3.4. Proprietà elementari delle funzioni olomorfe	54
3.5. Interpretazione geometrica della derivabilità complessa	56
3.6. Trasformazioni conformi	59

## Capitolo 4. L'USO DELLE TRASFORMAZIONI CON-

### FORMI NELLA SOLUZIONE DI PROBLEMI DI POTENZIALI PIANI . . . . . 63

- 4.1. Trasformazione conforme di un potenziale . . . . . 63  
4.2. Applicazioni . . . . . 65

## Capitolo 5. I TEOREMI INTEGRALI DI CAUCHY . . . . . 77

- 5.1. Integrali curvilinei di funzioni di variabile complessa . . . . . 77  
5.2. Il teorema integrale di Cauchy . . . . . 84  
5.3. Una semplice applicazione del teorema integrale di Cauchy . . . . . 91  
5.4. Il teorema fondamentale del calcolo integrale per funzioni olomorfe . . . . . 94  
5.5. Il teorema di rappresentazione di Cauchy e sue prime conseguenze . . . . . 96  
5.6. Calcolo di integrali curvilinei nel piano complesso; il Lemma di Jordan . . . . . 104  
5.6.1.  $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$  . . . . . 104  
5.6.2.  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^2+a^2} dx$  . . . . . 105  
5.7. La formula integrale di Cauchy per le derivate successive di una funzione olomorfa; il teorema di Morera . . . . . 108

## Capitolo 6. FUNZIONI OLOMORFE E SERIE DI POTENZE . . . . . 113

- 6.1. Serie di funzioni olomorfe e serie di potenze . . . . . 113  
6.2. Sviluppabilità in serie di potenze di funzioni olomorfe; sviluppi di Taylor . . . . . 115  
6.2.1. Esempi di sviluppi in serie di Taylor . . . . . 117  
6.3. Olomorfa all'infinito e sviluppi di Taylor nell'intorno dell'infinito . . . . . 120  
6.4. Il teorema di Liouville . . . . . 121  
6.5. Serie doppie . . . . . 123

## Capitolo 7. IDENTITÀ DI FUNZIONI OLOMORFE; PROLUNGAMENTI ANALITICI; FUNZIONI ANALITICHE COMPLETE POLIDROME E MONODROME . . . . . 127

- 7.1. Identità per serie di potenze e per funzioni olomorfe . . . . . 127  
7.2. Il principio del prolungamento analitico . . . . . 130  
7.2.1. Calcolo dei coefficienti di Taylor di elementi analitici "successivi" . . . . . 138  
7.2.2. Il teorema di Pringsheim e sue conseguenze . . . . . 138  
7.3. Prolungamento analitico lungo curve. Il logaritmo complesso . . . . . 141  
7.3.1. Prolungamento lungo curve . . . . . 141  
7.3.2. La funzione  $\ln z$  . . . . . 142  
7.4. Punti di diramazione . . . . . 148  
7.5. Il teorema di monodromia . . . . . 150  
7.6. Conseguenze del teorema di monodromia. Rami olomorfi di funzioni analitiche . . . . . 151  
7.7. Rami olomorfi di funzioni analitiche complete in domini non semplicemente internamente connessi . . . . . 154

## Capitolo 8. SINGOLARITÀ ISOLATE DI FUNZIONI OLOMORFE . . . . . 161

- 8.1. La serie di Laurent . . . . . 161  
8.1.1. Raggi di Convergenza della serie di Laurent . . . . . 164  
8.1.2. Unicità della serie di Laurent; esempi . . . . . 164  
8.2. Serie di Laurent e serie di Fourier . . . . . 168  
8.3. Singolarità isolate . . . . . 170  
8.3.1. Singolarità eliminabili . . . . . 172  
8.3.2. Poli . . . . . 173  
8.3.3. Singolarità essenziali . . . . . 174  
8.4. Serie di Laurent e parte principale di una funzione olomorfa nei pressi di una singolarità isolata . . . . . 175  
8.5. Calcolo dei Residui . . . . . 179  
8.5.1. Caso di un polo del primo ordine . . . . . 180  
8.5.2. Il residuo in un polo di ordine  $n$  . . . . . 181  
8.5.3. Applicazioni del teorema dei residui . . . . . 182  
8.6. Comportamento all'infinito di funzioni olomorfe. Il residuo all'infinito . . . . . 183  
8.7. La derivata logaritmica e l'indicatore logaritmico . . . . . 185  
8.7.1. Interpretazione geometrica dell'indicatore logaritmico . . . . . 188  
8.8. La serie di Bürmann-Lagrange . . . . . 191  
8.8.1. Applicazioni della serie di Bürmann-Lagrange . . . . . 193

8.8.2. L'inversione di serie di potenze mediante la serie di Bürmann-Lagrange . . . . .	194
--	-----

## Capitolo 9. INTEGRALI IMPROPRI REALI CALCO- LATI MEDIANTE IL TEOREMA DEI RE- SIDUI . . . . . 197

9.1. $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} R(x) dx$ . . . . .	197
9.2. Il valore principale di Cauchy . . . . .	199
9.3. Integrali di funzioni periodiche . . . . .	201
9.4. $\int_{-\infty}^{\infty} R(e^x) e^{ax} dx$ ( $0 < \alpha < 1$ ) . . . . .	202
9.5. $\int_0^{\infty} x^{-\alpha} R(x) dx$ ( $0 < \alpha < 1$ ) . . . . .	204
9.6. $\int_0^{\infty} \frac{R(x)}{x^{\alpha}} dx$ con $R$ avente poli semplici su $\mathbb{R}^+$ . . . . .	207
9.7. $\int_0^{\infty} R(x) \log x dx$ . . . . .	209
9.8. Cambiamento di variabili e teorema dei residui . . . . .	210
9.9. Integrali estesi ad archi di curva in $\mathbb{C}$ . Integrali del tipo $\int_0^{\infty} R(x) dx$ . . . . .	213
9.10. Uso del calcolo dei Residui per trovare la somma di serie numeriche . . . . .	217

## Capitolo 10. LE FUNZIONI $\Gamma$ E $B$ DI EULERO . . . . . 219

10.1. Richiami sugli integrali impropri uniformemente convergenti	219
10.2. La funzione $\Gamma$ di Eulero . . . . .	220
10.2.1. La funzione $\Gamma$ e l'integrale di Gauss . . . . .	222
10.3. La funzione $B$ di Eulero . . . . .	222
10.4. Formula dei complementi . . . . .	224

## Capitolo 11. TRASFORMATA DI LAPLACE . . . . . 227

11.1. Trasformata di Laplace e sua inversa . . . . .	227
11.2. Proprietà della trasformata di Laplace . . . . .	235
11.3. Teoremi di convoluzione . . . . .	241
11.4. Teoremi di sviluppo . . . . .	242
11.5. La trasformata di Laplace di potenze generalizzate . . . . .	247
11.6. Applicazioni del teorema di convoluzione . . . . .	247
11.7. Un'applicazione della trasformata di Laplace all'equazio- ne di Bessel . . . . .	249
11.8. La trasformata di Laplace bilatera e la trasformata di Mellin . . . . .	250
11.9. Gli integrali di Lipschitz e Weber . . . . .	254

## Capitolo 12. CENNI DI TEORIA DELLE DISTRIBU- ZIONI . . . . . 255

12.1. Introduzione . . . . .	255
12.2. Derivata di distribuzioni . . . . .	259
12.3. Funzioni a decrescenza rapida e distribuzioni temperate . . . . .	261
12.4. Trasformata di Laplace di distribuzioni . . . . .	262

## Capitolo 13. POLINOMI DI LEGENDRE E EQUAZIONE DI LEGENDRE . . . . . 265

13.1. Polinomi di Legendre . . . . .	265
13.2. L'equazione differenziale di Legendre . . . . .	267
13.3. Funzioni di Legendre (armoniche sferiche di secondo tipo)	269
13.4. Una rappresentazione esplicita dei polinomi di Legendre: la formula di Rodrigues . . . . .	270
13.5. Ortogonalità dei polinomi di Legendre . . . . .	271

## Capitolo 14. FUNZIONI DI BESSEL . . . . . 273

14.1. Osservazione sul prodotto di serie assolutamente conver- genti: il prodotto "anti diagonale" . . . . .	273
14.2. Funzioni di Bessel . . . . .	274
14.3. L'equazione differenziale di Bessel . . . . .	277
14.4. L'equazione della membrana e l'equazione di Bessel . . . . .	279
14.5. Funzioni di Bessel di secondo tipo . . . . .	280
14.6. Un'equazione riconducibile a un'equazione di Bessel . . . . .	282
14.7. Un'applicazione delle funzioni di Bessel . . . . .	283

## Capitolo 15. TRASFORMATA DI FOURIER . . . . . 287

15.1. Serie di Fourier . . . . .	287
15.2. Teoremi di convergenza per la serie di Fourier . . . . .	288
15.3. La trasformata di Fourier . . . . .	289
15.4. Proprietà della trasformata di Fourier . . . . .	290
15.5. Trasformata di Fourier: esempi . . . . .	291
15.6. Trasformata di Fourier di "Funzioni" singolari . . . . .	293
15.7. Trasformata di Fourier e serie di Fourier . . . . .	296
15.8. Serie di Fourier troncate . . . . .	299
15.9. Somme di Fejér . . . . .	300
15.10. Il teorema di campionamento (Sampling theorem) . . . . .	301
15.11. Trasformate di Fourier bidimensionale e trasformate di Hankel . . . . .	303



# Capitolo 16. EQUAZIONE DEL CALORE E LA SUA TRATTAZIONE CON IL METODO DI FOURIER

RIER . . . . .	309
16.1. Equazione del calore . . . . .	309
16.2. Il metodo di Fourier . . . . .	311

# Capitolo 17. TRASFORMATA $Z$

17.1. Definizione e proprietà basilari . . . . .	321
17.2. Esempi di trasformate $Z$ . . . . .	322
17.3. Inversione della trasformata $Z$ . . . . .	325
17.4. Ulteriori proprietà della trasformata $Z$ . . . . .	330
17.5. Uso della trasformata $Z$ per la risoluzione di equazioni alle differenze . . . . .	338

# Capitolo 18. LA TRASFORMATA DI FOURIER DI-

SCRETA . . . . .	341
18.1. Introduzione . . . . .	341
18.2. Proprietà della DFT . . . . .	342