

Carlo Bernardini Orlando Ragnisco Paolo Maria Santini

Metodi matematici della fisica



Carocci editore

2ª ristampa, maggio 2014
1ª edizione Studi Superiori, marzo 2012
1ª edizione Università, 1993 (6 ristampe)
© copyright 1993 by La Nuova Italia Scientifica, Roma
© copyright 1998 by Carocci editore S.p.A., Roma

Finito di stampare nel maggio 2014
da Grafiche VD srl, Città di Castello (PG)

ISBN 978-88-430-1517-7

Riproduzione vietata ai sensi di legge
(art. 171 della legge 22 aprile 1941, n. 633)

Senza regolare autorizzazione,
è vietato riprodurre questo volume
anche parzialmente e con qualsiasi mezzo,
compresa la fotocopia, anche per uso interno
o didattico.

Indice

Prefazione	13
1. Funzioni di una variabile complessa	15
1.1. Proprietà notevoli dei numeri complessi	15
1.1.1. Definizione e operazioni elementari	15
1.1.2. Interpretazione geometrica	16
1.1.3. Calcolo vettoriale in 2 dimensioni con i numeri complessi	22
1.2. I numeri complessi in fisica	25
1.2.1. Osservatori rotanti	25
1.2.2. Il metodo delle coordinate rotanti	26
1.2.3. Sistemi lineari causali	27
1.2.4. Cinematica in coordinate polari piane	29
1.3. Funzioni analitiche	30
1.3.1. Il punto all'infinito	30
1.3.2. La nozione di dominio	31
1.3.3. Le funzioni di una variabile complessa	32
1.3.4. Condizioni di Cauchy-Riemann	35
1.3.5. Funzioni analitiche e funzioni armoniche	39
1.3.6. Trasformazioni conformi	40
1.3.7. Funzioni elementari di variabile complessa	42
1.4. Le trasformazioni (mapping) bilineari o di Moebius	49
1.4.1. Proprietà generali	49
1.4.2. Trasformazioni elementari	50
1.4.3. Rappresentazione matriciale del gruppo di Moebius	52
1.5. Le funzioni analitiche in fisica; l'equazione di Laplace	54
1.5.1. Campi conservativi	54
1.5.2. Campi vettoriali piani	56
1.5.3. La soluzione di problemi armonici mediante il mapping	58
1.6. Singolarità polari ed essenziali; funzioni monodrome	67
1.6.1. Zeri di una funzione analitica e loro proprietà	67

1.6.2. Poli e singolarità essenziali	69
1.6.3. Classificazione delle funzioni analitiche monodrome	71
1.7. Polidromia	72
1.7.1. Rami di funzioni polidrome	72
1.7.2. Superfici di Riemann	74
1.7.3. Considerazioni topologiche sulle superfici di Riemann	77
2. Integrazione delle funzioni di una variabile complessa	81
2.1. Integrali di linea	81
2.2. Il teorema integrale di Cauchy	84
2.2.1. Il caso dei domini semplicemente connessi	84
2.2.2. Primitive di una funzione analitica	89
2.2.3. Il caso dei domini a connessione multipla	91
2.3. La formula integrale di Cauchy e i suoi corollari	95
2.3.1. La formula integrale di Cauchy	95
2.3.2. Il teorema del massimo modulo	97
2.3.3. Corollari	99
2.3.4. Valore principale di un integrale	101
2.3.5. Formule di Plemelj-Sokhotski	104
2.4. Integrali su archi infiniti e infinitesimi. Lemma di Jordan	108
2.5. La causalità e le relazioni di dispersione	114
3. Rappresentazioni integrali e per serie	119
3.1. Considerazioni introduttive	119
3.2. Domini di convergenza	121
3.2.1. Convergenza uniforme e criteri di convergenza	121
3.2.2. Famiglie di funzioni	123
3.3. Teoremi di Liouville e di Morera	124
3.3.1. Teoremi di Liouville	124
3.3.2. Teorema di Morera	125
3.4. Serie di Taylor e di Laurent e prodotti infiniti	127
3.4.1. Serie di Taylor	127
3.4.2. Serie di Laurent	132
3.4.3. Sviluppo di Mittag-Leffler e prodotti infiniti	137
3.5. Integrali con i residui	149
3.5.1. Il teorema dei residui	149
3.5.2. Applicazioni del teorema dei residui	152
3.6. Il prolungamento analitico	154
3.6.1. Introduzione	154
3.6.2. Unicità del prolungamento analitico	155
3.6.3. Prolungamento di soluzioni di equazioni	157

3.6.4.	Il prolungamento analitico; punti regolari e singolari	159
3.6.5.	Esistenza del prolungamento analitico	163
3.6.6.	Il principio di Schwarz e la funzione di Jacobi	169
3.6.7.	Il prolungamento analitico di rappresentazioni integrali	173
3.6.8.	Calcolo di integrali con i residui	176
3.7.	Sviluppi asintotici	194
3.7.1.	La nozione di sviluppo asintotico	194
3.7.2.	Operazioni su sviluppi asintotici	197
3.7.3.	Rappresentazioni integrali e sviluppi asintotici	199
3.7.4.	Metodo di Laplace	204
3.7.5.	Il metodo della fase stazionaria (o di Kelvin o di Stokes)	207
3.7.6.	Il metodo del punto di sella	208
3.7.7.	Equazioni differenziali e sviluppi asintotici	212
4.	Spazi lineari e operatori lineari	223
4.1.	Linearità e non-linearità in fisica	223
4.2.	Spazi vettoriali di dimensione finita	229
4.2.1.	Spazi vettoriali e vettori colonna	229
4.2.2.	Operatori lineari e matrici	237
4.2.3.	Spazi duali e vettori riga	245
4.2.4.	Basi; trasformazioni e proprietà invarianti	247
4.2.5.	Proprietà spettrali di operatori lineari	252
4.2.6.	Spazi euclidei	264
4.2.7.	Matrici hermitiane, unitarie e normali	270
4.2.8.	Le matrici di Pauli	280
4.2.9.	Rappresentazione polare di una matrice	281
4.2.10.	Funzioni di matrici	282
4.3.	Spazi lineari astratti	286
4.3.1.	Considerazioni introduttive	286
4.3.2.	Spazi lineari: definizione e proprietà	287
4.3.3.	Spazi metrici	290
4.3.4.	Spazi normati	302
4.3.5.	Spazi con prodotto scalare (o euclidei)	303
4.4.	Funzionali lineari e distribuzioni	311
4.4.1.	Nozioni preliminari sugli operatori lineari	311
4.4.2.	Funzionali lineari su spazi normati qualsiasi	312
4.4.3.	Distribuzioni	323
4.5.	Operatori lineari	353
4.5.1.	Esempi di operatori lineari	354
4.5.2.	Algebra degli operatori lineari	356
4.5.3.	Successioni di operatori e loro proprietà di convergenza	357

4.5.4. Operatori invertibili. Inverso di un operatore	359
4.5.5. Operatori aggiunti e autoaggiunti su spazi di Hilbert	364
4.5.6. L'equazione $y = Ax$	366
4.5.7. Operatori compatti	369
4.6. Teoria spettrale degli operatori	377
4.6.1. Considerazioni preliminari	377
4.6.2. L'operatore risolvete	379
4.6.3. Proprietà spettrali degli operatori autoaggiunti	382
4.6.4. Operatori unitari e loro spettro	384
4.6.5. Proprietà spettrali degli operatori compatti	385
4.6.6. Alcuni esempi	386
4.6.7. Equazioni lineari alle differenze seconde	391
4.6.8. Decomposizione spettrale	394
4.7. Serie e integrale di Fourier: ulteriori proprietà e applicazioni	412
4.7.1. Proprietà della serie di Fourier	412
4.7.2. Proprietà e applicazioni dell'integrale di Fourier	416
4.7.3. Trasformazioni tra operatori. Trasformata di Cayley	427
5. Equazioni integrali e differenziali	431
5.1. Equazioni integrali	431
5.1.1. Operatori integrali	431
5.1.2. Tipologia delle equazioni integrali	437
5.1.3. Equazioni di Volterra	439
5.1.4. Equazioni di Fredholm di seconda specie (I)	443
5.1.5. Equazioni di Fredholm di seconda specie (II)	447
5.1.6. Equazioni differenziali ed equazioni di Volterra	455
5.2. Operatori differenziali e funzione di Green	464
5.2.1. Introduzione; operatori differenziali del I ordine	464
5.2.2. Operatori differenziali del II ordine	471
5.2.3. Problemi di Sturm-Liouville	487
5.3. Funzioni ortogonali in L_2 . Polinomi classici	504
5.3.1. I polinomi di Legendre; i polinomi di Chebichev	504
5.3.2. Relazioni di ricorrenza; equazioni alle differenze finite	512
5.3.3. Polinomi di Hermite e di Laguerre	514
5.4. Il metodo WKB	521
5.5. Piccole oscillazioni e modi normali	526
5.6. Cenno all'uso dei gruppi di simmetria	540
6. Equazioni alle derivate parziali	549
6.1. Considerazioni elementari	549
6.2. Equazioni quasi-lineari del 1° ordine	554

INDICE

6.3. Equazioni quasi-lineari del 2° ordine	558
6.4. Una formula di Green	561
6.5. Equazioni a derivate parziali di interesse per la fisica	569
6.5.1. Introduzione	569
6.5.2. L'equazione di Poisson	571
6.5.3. L'equazione di Helmholtz	572
6.5.4. L'equazione di Fourier	573
6.5.5. Problemi di diffrazione e scattering	577
6.5.6. L'equazione di Schroedinger e gli stati legati	580
6.6. Il problema del random-walk	585
6.6.1. Problemi al discreto	585
6.6.2. Equazioni generali dei processi stocastici stazionari	589
Bibliografia	593
Indice analitico	595