

74358

# La matematica

A cura di Claudio Bartocci e Piergiorgio Odifreddi

Volume secondo  
Problemi e teoremi

Direzione scientifica di Claudio Bartocci



Giulio Einaudi editore

## Indice

### Problemi e teoremi

YURI I. MANIN

p. 3 *Matematica e conoscenza: aspetti interni, sociali e culturali*

1. La conoscenza matematica

- 4 1.1. Uno sguardo d'insieme
- 7 1.2. Gli oggetti della conoscenza matematica
- 13 1.3. Definizioni, teoremi, dimostrazioni
- 15 1.4. Problemi, congetture, programmi di ricerca

2. La matematica come strumento cognitivo

- 16 2.1. Un po' di storia
- 17 2.2. Gli strumenti cognitivi della matematica
- 19 2.3. I modelli

3. Le scienze matematiche e i valori dell'uomo

- 3.1. Introduzione
- 27 3.2. Razionalità
- 3.3. Verità
- 28 3.4. Azione e contemplazione

MARTIN DAVIS

33 *I fondamenti dell'aritmetica*

- 35 1. La definizione fregeana di numero
- 42 2. Gli assiomi di Dedekind-Peano per l'aritmetica
- 44 3. Il secondo problema di Hilbert
- 45 4. I «Principia mathematica»
- 46 5. Il programma di Hilbert
- 49 6. Kurt Gödel
- 56 7. Il programma di Hilbert dopo Gödel
- 58 8. I fondamenti oggi

DAVID A. VOGAN JR

*La classificazione dei gruppi*

- p. 61 1. Introduzione  
 62 2. La simmetria  
 66 3. I gruppi di simmetria  
 69 4. I gruppi astratti  
 71 5. I sottogruppi  
 75 6. Le orbite  
 80 7. Le classi laterali e la dimostrazione del teorema 4.2  
 84 8. I sottogruppi normali  
 90 9. I gruppi semplici e le serie di composizione

JOHN STILLWELL

*Il teorema fondamentale del calcolo*

- 99 1. Il teorema fondamentale del moto  
 102 2. Prime determinazioni di tangenti (coefficienti angolari) e misurazioni di aree  
 106 3. Prime versioni del teorema fondamentale  
 110 4. Differenziabilità, continuità e oltre  
 113 5. Evoluzione del concetto di integrale  
 118 6. Il teorema fondamentale del calcolo secondo Lebesgue  
 119 7. L'estensione di Schwartz del concetto di funzione  
 125 8. L'estensione di Robinson del concetto di numero

ANDREW GRANVILLE

*Il teorema fondamentale dell'aritmetica*

1. Introduzione  
 131 1.1. Il teorema fondamentale  
 133 1.2. Una storia confusa  
 135 1.3. Frazioni continue  
 138 1.4. Radici quadrate  
 2. Fattorizzazione unica in altri domini?  
 139 2.1. Polinomi  
 140 2.2. Dove non c'è fattorizzazione unica!  
 141 2.3. L'ultimo teorema di Fermat  
 3. Una teoria generale  
 142 3.1. Ideali  
 144 3.2. Campi di numeri, interi algebrici e unità  
 146 3.3. Gli interi di Gauss  
 147 3.4. Fattorizzare un primo  $p$  in un dato campo di numeri  
 4. Gruppi  
 148 4.1. Costruire le unità

- 4.2. Elementi irriducibili
- 51 4.3. Il gruppo delle classi
- 55 4.4. Esempi di equazioni
- 5. Forme quadratiche, ideali e trasformazioni
- 56 5.1. Prospettive diverse sulla riduzione
- 57 5.2. Forme quadratiche
- 6. Equazioni diofantee
- 158 6.1. L'ultimo teorema di Fermat, rivisitato
- 159 6.2. Curve ellittiche
- 7. La fattorizzazione unica, in pratica
- 160 7.1. Fattorizzare
- 162 7.2. Crittografia
- 164 7.3. Test di primalità
- 165 8. Ulteriori sviluppi

HAROLD M. EDWARDS

ni di aree 167 *La risoluzione delle equazioni algebriche*

BENJAMIN FINE e GERHARD ROSENBERGER

*Il teorema fondamentale dell'algebra*

- 177 1. Introduzione
- 181 2. Le dimostrazioni originali di Gauss
- 184 2.1. La quarta dimostrazione di Gauss
- 189 3. Dimostrazioni analitiche
- 198 4. Dimostrazioni algebriche
- 208 5. Dimostrazioni topologiche

FRANCESCO AMOROSO e CARLO VIOLA

*Numeri irrazionali e numeri trascendenti*

- 217 1. Introduzione
- 218 2. Irrazionalità
- 222 3. Approssimazione diofantea e frazioni continue
- 225 4. Misure d'irrazionalità
- 228 5. Approssimazioni razionali a numeri algebrici
- 230 6. I primi numeri trascendenti: Liouville
- 232 7. La trascendenza di  $e$  secondo Hermite
- 236 8. Il teorema di Gel'fond-Schneider
- 238 9. I metodi di Gel'fond e Schneider
- 241 10.  $E$ -funzioni e  $G$ -funzioni
- 244 11. Il teorema di Baker e qualche altro risultato notevole

JONATHAN M. BORWEIN

*La vita di pi greco*

- p. 249 1. Preambolo: pi greco nella cultura popolare  
 251 2. Presentazione di pi greco  
 252 3. L'infanzia di pi greco  
 253 3.1. Il metodo di Archimede  
 255 4. Approssimazioni di  $\pi$  prima del calcolo infinitesimale  
 256 5. L'adolescenza di pi greco  
 259 6. La vita adulta di pi greco e il calcolo infinitesimale  
 260 6.1. Una curiosa anomalia nella serie di Gregory  
 261 7. Le approssimazioni di  $\pi$  nell'epoca del calcolo infinitesimale  
 262 7.1. I calcoli di Newton con l'arcoseno  
 263 7.2. Il calcolatore viennese  
 264 8. L'irrazionalità e la trascendenza di  $\pi$   
 8.1. Misure di irrazionalità  
 266 9. Pi greco nell'era digitale  
 9.1. L'Electronic Numerical Integrator and Calculator (ENIAC).  
 267 9.2. La serie di Ballantine per  $\pi$  (1939)  
 268 9.3. Le serie ellittiche di Rāmānujan  
 270 10. Algoritmi a complessità operativa ridotta  
 10.1. Filosofia della matematica  
 272 11. Ritorno al futuro  
 273 12. Perché pi greco?  
 274 12.1. Cambiare la visione del mondo  
 275 12.2. Scoprire le iterazioni di  $\pi$   
 276 13. Come calcolare l'*N*-esima cifra di  $\pi$   
 277 13.1. L'algoritmo in azione  
 278 14. Altre formule di tipo BBP per il calcolo di una cifra  
 279 14.1. Formule BBP in base tre  
 280 14.2. Normalità e dinamica  
 15. Vita di pi greco  
 281 16. Note di chiusura

UMBERTO ZANNIER

*Risultati e metodi nella teoria delle equazioni diofantee*

- 287 1. Generalità  
 290 2. Le questioni principali  
 291 3. Alcuni risultati notevoli  
 297 3.1. Risultati in dimensione superiore  
 4. Alcuni metodi notevoli  
 298 4.1. Il metodo della discesa  
 299 4.2. Metodi algebrici

- p. 301 4.3. Metodi locali  
 303 4.4. Metodi di approssimazione diofantea  
 306 4.5. Metodi geometrici

MASSIMO BERTOLINI

*L'ultimo teorema di Fermat*

- 313 1. Introduzione  
 315 2. Cenni storici  
 318 3. La congettura di Shimura-Taniyama  
 324 4. Shimura-Taniyama implica Fermat  
 325 5. Appendice 1. Preliminari algebrici  
 328 6. Appendice 2. I campi  $\mathbb{Q}(E_n)$  e la strategia di Wiles  
 329 7. Appendice 3. Conseguenze del lavoro di Wiles

ALAN BAKER

*Numeri trascendenti e problemi diofantei*

- 335 1. Introduzione  
 336 2. La quadratura del cerchio  
 337 3. Il settimo problema di Hilbert  
 339 4. Forme logaritmiche  
 340 5. Il problema del numero delle classi  
 342 6. Il problema di Mahler in teoria metrica  
 344 7. La congettura «abc»

JOHN STILLWELL

*Le serie infinite*

- 349 1. La serie geometrica  
 355 2. La serie armonica  
 358 3. Le serie di potenze per funzioni circolari  
 360 4. Le serie di Taylor  
 362 5. Inversione di serie  
 366 6. La funzione zeta  
 370 7. La costante di Eulero  
 372 8. La teoria della convergenza  
 375 9. Le serie di Fourier  
 378 10. Serie di Fourier e funzioni discontinue

J. BRIAN CONREY

*L'ipotesi di Riemann*

- 383 1. Introduzione  
 385 2. L'enunciato preciso dell'ipotesi di Riemann

p. 389	3. L'equazione funzionale di Riemann
392	4. La formula per contare il numero degli zeri
393	5. Che cosa sappiamo a proposito degli zeri?
394	6. Enunciati equivalenti nella teoria dei numeri
	7. Universalità di $\zeta(s)$
395	8. Formule esplicite
398	9. Approcci all'ipotesi di Riemann
402	9.1. Il teorema di Bombieri
403	9.2. Nyman, Beurling, Baez-Duarte, Vasyunin
404	10. L'ipotesi di Riemann implica quella di Lindelöf
405	11. Correlazione di coppia e teoria delle matrici random
406	11.1. La teoria delle matrici random e i momenti di $\zeta(s)$
	12. Le funzioni $L$
408	12.1. La classe di Selberg
410	12.2. Funzioni $L$ di grado 2
412	12.3. Funzioni $L$ quadrate simmetriche
413	12.4. Funzioni $L$ di convoluzione
	12.5. Famiglie di funzioni $L$ e teoria delle matrici random
	13. Altri approcci all'ipotesi di Riemann
	13.1. Meccanica statistica
414	13.2. Funzioni zeta su campi finiti
416	13.3. Alcuni enunciati equivalenti interessanti
420	14. Aneddoti

JOHN K. TRUSS

*I fondamenti dell'analisi*

427	1. Introduzione
429	2. Il completamento di un insieme totalmente ordinato
437	2.1. Estensione al caso generale del completamento di un insieme totalmente ordinato
438	2.2. $\mathbb{R}$ non è numerabile
440	2.3. Gli ordinali
	2.4. La retta reale estesa
442	2.5. Le rette lunghe
443	2.6. L'ipotesi di Suslin
445	3. Il completamento degli spazi metrici
452	4. La costruzione di $\mathbb{R}$ con le espansioni decimali
453	5. La teoria delle grandezze di Eudosso
455	6. I campi non archimedei e l'analisi non standard
457	7. L'integrazione

AKIHIRO KANAMORI

p. 461 *L'ipotesi del continuo*

## 1. Cantor

- 462 1.1. Numeri reali e numerabilità  
 465 1.2. L'ipotesi del continuo e i numeri transfiniti  
 468 1.3. Diagonalizzazione e numeri cardinali

## 2. Matematizzazione

- 472 2.1. I primi passi  
 476 2.2. L'assioma della scelta  
 478 2.3. L'assiomatizzazione  
 481 2.4. Insiemi analitici e proiettivi  
 484 2.5. Il completamento dell'assiomatizzazione  
 489 2.6. Equivalenze e conseguenze

## 3. La coerenza

- 491 3.1. La logica del primo ordine  
 494 3.2. L'universo costruibile  
 497 3.3. Nuovi assiomi

## 4. L'indipendenza

- 499 4.1. Il *forcing*  
 502 4.2. La potenza del *forcing*  
 506 4.3. La determinatezza

IVAR EKELAND

*Il calcolo delle variazioni*

- 515 1. Le origini  
 516 2. Pierre de Fermat  
 519 3. La scoperta dell'analisi  
 521 4. Il calcolo delle variazioni  
 523 5. Collegamenti con la fisica  
 527 6. Il calcolo delle variazioni nel xx secolo

ROBIN HARTSHORNE

*Sui fondamenti della geometria*

- 531 1. Introduzione  
 532 2. Gli *Elementi* di Euclide  
 535 3. La rivolta contro il rigore  
 537 4. L'uso dei numeri nella geometria  
 539 5. La teoria delle proporzioni  
 541 6. La continuità  
 542 7. Il postulato delle parallele e la geometria non euclidea  
 544 8. Gli assiomi di Hilbert



- p. 546 9. L'introduzione delle coordinate  
 548 10. La geometria proiettiva  
 552 11. La geometria algebrica  
 12. Conclusioni  
 553 13. Riferimenti bibliografici

## JEREMY GRAY

*La geometria dello spazio*

- 555 1. Euclide  
 557 2. I commentatori arabi e islamici  
 559 3. Il risveglio dell'Occidente  
 562 4. Gauss, Schweikart, Taurinus e la geometria differenziale di Gauss  
 565 5. Bolyai e Lobačevskij  
 569 6. Riemann  
 572 7. Beltrami  
 574 8. Klein  
 9. Poincaré  
 575 10. Il problema dello spazio di Helmholtz-Lie  
 578 11. I corpi rigidi e le forme spaziali di Clifford-Klein  
 580 12. Einstein, la teoria della relatività ristretta e Minkowski  
 581 13. La teoria della relatività generale  
 582 14. Da Riemann a Levi-Civita, Weyl e Cartan

## ENRICO ARBARELLO

*Superfici di Riemann*

- 591 1. Cenni storici  
 595 2. Topologia delle superfici  
 600 3. Geometria differenziale delle superfici  
 604 4. Geometria riemanniana delle superfici  
 607 5. Geometria complessa delle superfici  
 614 6. Superfici di Riemann e curve algebriche  
 618 7. I periodi delle superfici di Riemann  
 621 8. Geometria iperbolica delle superfici  
 625 9. I moduli secondo Teichmüller  
 629 10. Moduli delle curve stabili  
 634 11. Superfici di Riemann e teoria delle stringhe  
 639 12. Curve algebriche e teoria dei numeri

## FABRIZIO CATANESE

*La classificazione delle varietà algebriche*

- 643 1. Prologo  
 644 2. Preistoria della geometria algebrica

- p. 652 3. La geometria algebrica nell'Ottocento  
 4. Il tardo Ottocento  
 661 4.1. Il problema degli invarianti, Hilbert, e l'algebra astratta  
 667 4.2. La teoria dell'uniformizzazione trascendente  
 672 4.3. L'uniformizzazione in piú variabili  
 674 4.4. Il progetto di classificazione delle superfici algebriche  
 679 5. Il teorema di classificazione delle superfici algebriche  
 683 5.1. Gli oggetti della classificazione di Enriques e il coronamento del loro studio  
 686 5.2. Le superfici  $K3$  e i risultati fondamentali di Kodaira  
 689 5.3. Le superfici di tipo generale  
 690 5.4. Gli spazi dei moduli delle superfici di tipo generale  
 692 6. I modelli minimi in dimensione piú alta e famiglie di curve razionali  
 695 6.1. I divisori nef e il cono di Mori  
 695 6.2. Le varietà di Fano e il problema della razionalità e unirazionalità  
 7. Altri punti di vista collegati  
 697 7.1. Le varietà reali  
 698 7.2. La curvatura  
 700 7.3. Il sogno che lega iperbolicità e mordellicità

## ARNAUD BEAUVILLE

- 705 *La congettura di Hodge*  
 706 1. Coomologia  
 708 2. La decomposizione di Hodge  
 711 3. L'enunciato della congettura di Hodge  
 714 4. Controesempi su  $Z$   
 716 5. Codimensione 1: il teorema di Lefschetz  
 719 6. Casi noti e casi non noti  
 722 7. La congettura di Hodge generale  
 724 8. Teoria di Hodge e cicli algebrici  
 727 9. Conclusione

## COLIN ROURKE

*La congettura di Poincaré*

- 731 1. Introduzione  
 732 2. La classificazione delle varietà  
 738 3. La congettura e le sue generalizzazioni  
 741 4. Il caso di dimensione  $n \geq 5$   
 747 5. Il caso di dimensione 4  
 749 6. Il programma di Thurston  
 754 7. Il programma di Perelman

MARTIN HENK e GÜNTER M. ZIEGLER

*La congettura di Keplero*

- p. 765 1. Un difficile rompicapo  
 767 2. Nel piano  
 775 3. Nello spazio tridimensionale  
 780 4. Una situazione scandalosa  
 782 5. Una ricetta?  
 787 6. Il computer contro Keplero  
 7. Problemi, problemi e ancora problemi  
     7.1. Sfere piú che vicine  
 788 7.2. Corpi difficilmente impaccabili  
     7.3. Impaccamenti reticolari  
 789 7.4. Impaccamenti finiti  
 791 7.5. Il problema del bacio

LUIGI ACCARDI

*Probabilità*

- 793 1. Introduzione: il ritardo del caso  
 794 2. La legge dei grandi numeri e il teorema centrale del limite  
 796 2.1. Le probabilità condizionate  
 799 2.2. L'ago di Buffon e la nascita della simulazione stocastica  
 3. Probabilità come estensione della logica: la logica dell'incerto  
 801 3.1. Identificazione tra eventi e affermazioni di un linguaggio  
 802 3.2. Misure di probabilità come estensioni delle funzioni verità  
 803 3.3. Probabilità intuizionista  
 805 4. L'Ottocento  
 806 4.1. Caso e probabilità in fisica nell'Ottocento  
 808 4.2. La scuola russa e la nascita della probabilità come disciplina matematica  
 809 5. I processi stocastici  
 811 6. L'analisi stocastica  
 812 6.1. La struttura dei processi stocastici classici  
 813 6.2. Generalizzazioni del calcolo stocastico  
 7. La rivoluzione della probabilità quantistica  
     7.1. Caratteristiche delle rivoluzioni matematiche  
 815 7.2. Problemi posti dal successo del modello probabilistico quantistico  
     7.3. Descrizione del nuovo formalismo  
 817 7.4. Primi passi verso l'unificazione: gli albori della teoria della teoria algebrica  
     della probabilità  
 820 7.5. Dubbi sulla necessità del nuovo modello probabilistico: variabili nascoste  
 821 7.6. Radici sperimentali della differenza tra probabilità classica e quantistica  
 822 7.7. Analogie tra geometrie non euclidee e probabilità non kolmogoroviane:  
     gli invarianti statistici

p. 824	7.8. Il sesto problema di Hilbert e la funzione euristica delle teorie assiomatiche
826	7.9. Eventi e misure: nuova assiomatica della probabilità
829	8. Conclusioni
833	<i>Indice dei nomi</i>
847	<i>Gli autori</i>