

74358

La matematica

A cura di Claudio Bartocci e Piergiorgio Odifreddi

Volume secondo
Problemi e teoremi

Direzione scientifica di Claudio Bartocci



Giulio Einaudi editore

Indice

Problemi e teoremi

YURI I. MANIN

p. 3 *Matematica e conoscenza: aspetti interni, sociali e culturali*

1. La conoscenza matematica

- 4 1.1. Uno sguardo d'insieme
- 7 1.2. Gli oggetti della conoscenza matematica
- 13 1.3. Definizioni, teoremi, dimostrazioni
- 15 1.4. Problemi, congetture, programmi di ricerca

2. La matematica come strumento cognitivo

- 16 2.1. Un po' di storia
- 17 2.2. Gli strumenti cognitivi della matematica
- 19 2.3. I modelli

3. Le scienze matematiche e i valori dell'uomo

- 3.1. Introduzione
- 27 3.2. Razionalità
- 3.3. Verità
- 28 3.4. Azione e contemplazione

MARTIN DAVIS

33 *I fondamenti dell'aritmetica*

- 35 1. La definizione fregeana di numero
- 42 2. Gli assiomi di Dedekind-Peano per l'aritmetica
- 44 3. Il secondo problema di Hilbert
- 45 4. I «Principia mathematica»
- 46 5. Il programma di Hilbert
- 49 6. Kurt Gödel
- 56 7. Il programma di Hilbert dopo Gödel
- 58 8. I fondamenti oggi

DAVID A. VOGAN JR

La classificazione dei gruppi

- p. 61 1. Introduzione
 62 2. La simmetria
 66 3. I gruppi di simmetria
 69 4. I gruppi astratti
 71 5. I sottogruppi
 75 6. Le orbite
 80 7. Le classi laterali e la dimostrazione del teorema 4.2
 84 8. I sottogruppi normali
 90 9. I gruppi semplici e le serie di composizione

JOHN STILLWELL

Il teorema fondamentale del calcolo

- 99 1. Il teorema fondamentale del moto
 102 2. Prime determinazioni di tangenti (coefficienti angolari) e misurazioni di aree
 106 3. Prime versioni del teorema fondamentale
 110 4. Differenziabilità, continuità e oltre
 113 5. Evoluzione del concetto di integrale
 118 6. Il teorema fondamentale del calcolo secondo Lebesgue
 119 7. L'estensione di Schwartz del concetto di funzione
 125 8. L'estensione di Robinson del concetto di numero

ANDREW GRANVILLE

Il teorema fondamentale dell'aritmetica

1. Introduzione
 131 1.1. Il teorema fondamentale
 133 1.2. Una storia confusa
 135 1.3. Frazioni continue
 138 1.4. Radici quadrate
 2. Fattorizzazione unica in altri domini?
 139 2.1. Polinomi
 140 2.2. Dove non c'è fattorizzazione unica!
 141 2.3. L'ultimo teorema di Fermat
 3. Una teoria generale
 142 3.1. Ideali
 144 3.2. Campi di numeri, interi algebrici e unità
 146 3.3. Gli interi di Gauss
 147 3.4. Fattorizzare un primo p in un dato campo di numeri
 4. Gruppi
 148 4.1. Costruire le unità

- 4.2. Elementi irriducibili
- 51 4.3. Il gruppo delle classi
- 55 4.4. Esempi di equazioni
- 5. Forme quadratiche, ideali e trasformazioni
- 56 5.1. Prospettive diverse sulla riduzione
- 57 5.2. Forme quadratiche
- 6. Equazioni diofantee
- 158 6.1. L'ultimo teorema di Fermat, rivisitato
- 159 6.2. Curve ellittiche
- 7. La fattorizzazione unica, in pratica
- 160 7.1. Fattorizzare
- 162 7.2. Crittografia
- 164 7.3. Test di primalità
- 165 8. Ulteriori sviluppi

HAROLD M. EDWARDS

ni di aree 167 *La risoluzione delle equazioni algebriche*

BENJAMIN FINE e GERHARD ROSENBERGER

Il teorema fondamentale dell'algebra

- 177 1. Introduzione
- 181 2. Le dimostrazioni originali di Gauss
- 184 2.1. La quarta dimostrazione di Gauss
- 189 3. Dimostrazioni analitiche
- 198 4. Dimostrazioni algebriche
- 208 5. Dimostrazioni topologiche

FRANCESCO AMOROSO e CARLO VIOLA

Numeri irrazionali e numeri trascendenti

- 217 1. Introduzione
- 218 2. Irrazionalità
- 222 3. Approssimazione diofantea e frazioni continue
- 225 4. Misure d'irrazionalità
- 228 5. Approssimazioni razionali a numeri algebrici
- 230 6. I primi numeri trascendenti: Liouville
- 232 7. La trascendenza di e secondo Hermite
- 236 8. Il teorema di Gel'fond-Schneider
- 238 9. I metodi di Gel'fond e Schneider
- 241 10. E -funzioni e G -funzioni
- 244 11. Il teorema di Baker e qualche altro risultato notevole

JONATHAN M. BORWEIN

La vita di pi greco

- p. 249 1. Preambolo: pi greco nella cultura popolare
 251 2. Presentazione di pi greco
 252 3. L'infanzia di pi greco
 253 3.1. Il metodo di Archimede
 255 4. Approssimazioni di π prima del calcolo infinitesimale
 256 5. L'adolescenza di pi greco
 259 6. La vita adulta di pi greco e il calcolo infinitesimale
 260 6.1. Una curiosa anomalia nella serie di Gregory
 261 7. Le approssimazioni di π nell'epoca del calcolo infinitesimale
 262 7.1. I calcoli di Newton con l'arcoseno
 263 7.2. Il calcolatore viennese
 264 8. L'irrazionalità e la trascendenza di π
 8.1. Misure di irrazionalità
 266 9. Pi greco nell'era digitale
 9.1. L'Electronic Numerical Integrator and Calculator (ENIAC).
 267 9.2. La serie di Ballantine per π (1939)
 268 9.3. Le serie ellittiche di Rāmānujan
 270 10. Algoritmi a complessità operativa ridotta
 10.1. Filosofia della matematica
 272 11. Ritorno al futuro
 273 12. Perché pi greco?
 274 12.1. Cambiare la visione del mondo
 275 12.2. Scoprire le iterazioni di π
 276 13. Come calcolare l'*N*-esima cifra di π
 277 13.1. L'algoritmo in azione
 278 14. Altre formule di tipo BBP per il calcolo di una cifra
 279 14.1. Formule BBP in base tre
 280 14.2. Normalità e dinamica
 15. Vita di pi greco
 281 16. Note di chiusura

UMBERTO ZANNIER

Risultati e metodi nella teoria delle equazioni diofantee

- 287 1. Generalità
 290 2. Le questioni principali
 291 3. Alcuni risultati notevoli
 297 3.1. Risultati in dimensione superiore
 4. Alcuni metodi notevoli
 298 4.1. Il metodo della discesa
 299 4.2. Metodi algebrici

- p. 301 4.3. Metodi locali
 303 4.4. Metodi di approssimazione diofantea
 306 4.5. Metodi geometrici

MASSIMO BERTOLINI

L'ultimo teorema di Fermat

- 313 1. Introduzione
 315 2. Cenni storici
 318 3. La congettura di Shimura-Taniyama
 324 4. Shimura-Taniyama implica Fermat
 325 5. Appendice 1. Preliminari algebrici
 328 6. Appendice 2. I campi $\mathbb{Q}(E_n)$ e la strategia di Wiles
 329 7. Appendice 3. Conseguenze del lavoro di Wiles

ALAN BAKER

Numeri trascendenti e problemi diofantei

- 335 1. Introduzione
 336 2. La quadratura del cerchio
 337 3. Il settimo problema di Hilbert
 339 4. Forme logaritmiche
 340 5. Il problema del numero delle classi
 342 6. Il problema di Mahler in teoria metrica
 344 7. La congettura «abc»

JOHN STILLWELL

Le serie infinite

- 349 1. La serie geometrica
 355 2. La serie armonica
 358 3. Le serie di potenze per funzioni circolari
 360 4. Le serie di Taylor
 362 5. Inversione di serie
 366 6. La funzione zeta
 370 7. La costante di Eulero
 372 8. La teoria della convergenza
 375 9. Le serie di Fourier
 378 10. Serie di Fourier e funzioni discontinue

J. BRIAN CONREY

L'ipotesi di Riemann

- 383 1. Introduzione
 385 2. L'enunciato preciso dell'ipotesi di Riemann

p. 389	3. L'equazione funzionale di Riemann
392	4. La formula per contare il numero degli zeri
393	5. Che cosa sappiamo a proposito degli zeri?
394	6. Enunciati equivalenti nella teoria dei numeri
	7. Universalità di $\zeta(s)$
395	8. Formule esplicite
398	9. Approcci all'ipotesi di Riemann
402	9.1. Il teorema di Bombieri
403	9.2. Nyman, Beurling, Baez-Duarte, Vasyunin
404	10. L'ipotesi di Riemann implica quella di Lindelöf
405	11. Correlazione di coppia e teoria delle matrici random
406	11.1. La teoria delle matrici random e i momenti di $\zeta(s)$
	12. Le funzioni L
408	12.1. La classe di Selberg
410	12.2. Funzioni L di grado 2
412	12.3. Funzioni L quadrate simmetriche
413	12.4. Funzioni L di convoluzione
	12.5. Famiglie di funzioni L e teoria delle matrici random
	13. Altri approcci all'ipotesi di Riemann
	13.1. Meccanica statistica
414	13.2. Funzioni zeta su campi finiti
416	13.3. Alcuni enunciati equivalenti interessanti
420	14. Aneddoti

JOHN K. TRUSS

I fondamenti dell'analisi

427	1. Introduzione
429	2. Il completamento di un insieme totalmente ordinato
437	2.1. Estensione al caso generale del completamento di un insieme totalmente ordinato
438	2.2. \mathbb{R} non è numerabile
440	2.3. Gli ordinali
	2.4. La retta reale estesa
442	2.5. Le rette lunghe
443	2.6. L'ipotesi di Suslin
445	3. Il completamento degli spazi metrici
452	4. La costruzione di \mathbb{R} con le espansioni decimali
453	5. La teoria delle grandezze di Eudosso
455	6. I campi non archimedei e l'analisi non standard
457	7. L'integrazione

AKIHIRO KANAMORI

p. 461 *L'ipotesi del continuo*

1. Cantor

- 462 1.1. Numeri reali e numerabilità
 465 1.2. L'ipotesi del continuo e i numeri transfiniti
 468 1.3. Diagonalizzazione e numeri cardinali

2. Matematizzazione

- 472 2.1. I primi passi
 476 2.2. L'assioma della scelta
 478 2.3. L'assiomatizzazione
 481 2.4. Insiemi analitici e proiettivi
 484 2.5. Il completamento dell'assiomatizzazione
 489 2.6. Equivalenze e conseguenze

3. La coerenza

- 491 3.1. La logica del primo ordine
 494 3.2. L'universo costruibile
 497 3.3. Nuovi assiomi

4. L'indipendenza

- 499 4.1. Il *forcing*
 502 4.2. La potenza del *forcing*
 506 4.3. La determinatezza

IVAR EKELAND

Il calcolo delle variazioni

- 515 1. Le origini
 516 2. Pierre de Fermat
 519 3. La scoperta dell'analisi
 521 4. Il calcolo delle variazioni
 523 5. Collegamenti con la fisica
 527 6. Il calcolo delle variazioni nel xx secolo

ROBIN HARTSHORNE

Sui fondamenti della geometria

- 531 1. Introduzione
 532 2. Gli *Elementi* di Euclide
 535 3. La rivolta contro il rigore
 537 4. L'uso dei numeri nella geometria
 539 5. La teoria delle proporzioni
 541 6. La continuità
 542 7. Il postulato delle parallele e la geometria non euclidea
 544 8. Gli assiomi di Hilbert

- p. 546 9. L'introduzione delle coordinate
 548 10. La geometria proiettiva
 552 11. La geometria algebrica
 12. Conclusioni
 553 13. Riferimenti bibliografici

JEREMY GRAY

La geometria dello spazio

- 555 1. Euclide
 557 2. I commentatori arabi e islamici
 559 3. Il risveglio dell'Occidente
 562 4. Gauss, Schweikart, Taurinus e la geometria differenziale di Gauss
 565 5. Bolyai e Lobačevskij
 569 6. Riemann
 572 7. Beltrami
 574 8. Klein
 9. Poincaré
 575 10. Il problema dello spazio di Helmholtz-Lie
 578 11. I corpi rigidi e le forme spaziali di Clifford-Klein
 580 12. Einstein, la teoria della relatività ristretta e Minkowski
 581 13. La teoria della relatività generale
 582 14. Da Riemann a Levi-Civita, Weyl e Cartan

ENRICO ARBARELLO

Superfici di Riemann

- 591 1. Cenni storici
 595 2. Topologia delle superfici
 600 3. Geometria differenziale delle superfici
 604 4. Geometria riemanniana delle superfici
 607 5. Geometria complessa delle superfici
 614 6. Superfici di Riemann e curve algebriche
 618 7. I periodi delle superfici di Riemann
 621 8. Geometria iperbolica delle superfici
 625 9. I moduli secondo Teichmüller
 629 10. Moduli delle curve stabili
 634 11. Superfici di Riemann e teoria delle stringhe
 639 12. Curve algebriche e teoria dei numeri

FABRIZIO CATANESE

La classificazione delle varietà algebriche

- 643 1. Prologo
 644 2. Preistoria della geometria algebrica

- p. 652 3. La geometria algebrica nell'Ottocento
 4. Il tardo Ottocento
 661 4.1. Il problema degli invarianti, Hilbert, e l'algebra astratta
 667 4.2. La teoria dell'uniformizzazione trascendente
 672 4.3. L'uniformizzazione in piú variabili
 674 4.4. Il progetto di classificazione delle superfici algebriche
 679 5. Il teorema di classificazione delle superfici algebriche
 683 5.1. Gli oggetti della classificazione di Enriques e il coronamento del loro studio
 686 5.2. Le superfici $K3$ e i risultati fondamentali di Kodaira
 689 5.3. Le superfici di tipo generale
 690 5.4. Gli spazi dei moduli delle superfici di tipo generale
 692 6. I modelli minimi in dimensione piú alta e famiglie di curve razionali
 695 6.1. I divisori nef e il cono di Mori
 695 6.2. Le varietà di Fano e il problema della razionalità e unirazionalità
 7. Altri punti di vista collegati
 697 7.1. Le varietà reali
 698 7.2. La curvatura
 700 7.3. Il sogno che lega iperbolicità e mordellicità

ARNAUD BEAUVILLE

- 705 *La congettura di Hodge*
 706 1. Coomologia
 708 2. La decomposizione di Hodge
 711 3. L'enunciato della congettura di Hodge
 714 4. Controesempi su Z
 716 5. Codimensione 1: il teorema di Lefschetz
 719 6. Casi noti e casi non noti
 722 7. La congettura di Hodge generale
 724 8. Teoria di Hodge e cicli algebrici
 727 9. Conclusione

COLIN ROURKE

La congettura di Poincaré

- 731 1. Introduzione
 732 2. La classificazione delle varietà
 738 3. La congettura e le sue generalizzazioni
 741 4. Il caso di dimensione $n \geq 5$
 747 5. Il caso di dimensione 4
 749 6. Il programma di Thurston
 754 7. Il programma di Perelman

MARTIN HENK e GÜNTER M. ZIEGLER

La congettura di Keplero

- p. 765 1. Un difficile rompicapo
 767 2. Nel piano
 775 3. Nello spazio tridimensionale
 780 4. Una situazione scandalosa
 782 5. Una ricetta?
 787 6. Il computer contro Keplero
 7. Problemi, problemi e ancora problemi
 7.1. Sfere piú che vicine
 788 7.2. Corpi difficilmente impaccabili
 7.3. Impaccamenti reticolari
 789 7.4. Impaccamenti finiti
 791 7.5. Il problema del bacio

LUIGI ACCARDI

Probabilità

- 793 1. Introduzione: il ritardo del caso
 794 2. La legge dei grandi numeri e il teorema centrale del limite
 796 2.1. Le probabilità condizionate
 799 2.2. L'ago di Buffon e la nascita della simulazione stocastica
 3. Probabilità come estensione della logica: la logica dell'incerto
 801 3.1. Identificazione tra eventi e affermazioni di un linguaggio
 802 3.2. Misure di probabilità come estensioni delle funzioni verità
 803 3.3. Probabilità intuizionista
 805 4. L'Ottocento
 806 4.1. Caso e probabilità in fisica nell'Ottocento
 808 4.2. La scuola russa e la nascita della probabilità come disciplina matematica
 809 5. I processi stocastici
 811 6. L'analisi stocastica
 812 6.1. La struttura dei processi stocastici classici
 813 6.2. Generalizzazioni del calcolo stocastico
 7. La rivoluzione della probabilità quantistica
 7.1. Caratteristiche delle rivoluzioni matematiche
 815 7.2. Problemi posti dal successo del modello probabilistico quantistico
 7.3. Descrizione del nuovo formalismo
 817 7.4. Primi passi verso l'unificazione: gli albori della teoria della teoria algebrica
 della probabilità
 820 7.5. Dubbi sulla necessità del nuovo modello probabilistico: variabili nascoste
 821 7.6. Radici sperimentali della differenza tra probabilità classica e quantistica
 822 7.7. Analogie tra geometrie non euclidee e probabilità non kolmogoroviane:
 gli invarianti statistici

p. 824	7.8. Il sesto problema di Hilbert e la funzione euristica delle teorie assiomatiche
826	7.9. Eventi e misure: nuova assiomatica della probabilità
829	8. Conclusioni
833	<i>Indice dei nomi</i>
847	<i>Gli autori</i>