

Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

11

Jean-Pierre Serre

Algèbre Locale Multiplicités

Cours au Collège de France, 1957–1958
rédigé par Pierre Gabriel
Troisième édition



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

Author

Jean-Pierre Serre
Collège de France
Chaire d'Algèbre et Géométrie
11, place Marcelin Berthelot
F-75231 Paris Cedex 05

3rd Edition 1975

2nd Corrected Printing 1997

Mathematics Subject Classifications (1970): 13-02, 13C15, 13D05, 13H05,
13H10, 13H15, 14O15

ISBN 3-540-07028-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-07028-1 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

Library of Congress Cataloging in Publication Data

Serre, Jean-Pierre.

Algèbre locale, multiplicités.

(Lecture notes in mathematics ; 11)

Bibliography: p.

1. Geometry, Algebraic. 2. Rings (Algebra)

3. Modules (Algebra) I. Title. II. Series:

Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 11.

QA3.L28 no. 11, 1975 [QA564] 510'.8s [516'.35] 75-359

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1975

Printed in Germany

Printing and binding: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten

2146/3140-5432

SPIN 11361473

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Chapitre I. IDÉAUX PREMIERS ET LOCALISATION

1. Notations et définitions	1
2. Lemme de Nakayama	1
3. Localisation	2
4. Anneaux et modules noethériens	2
5. Spectre	3
6. Le cas noethérien	4
7. Idéaux premiers associés	4

Chapitre II. OUTILS ET SORTES

A) Filtrations et graduations	8
1. Anneaux et modules filtrés	8
2. Topologie définie par une filtration	9
3. Complétion des modules filtrés	10
4. Anneaux et modules gradués	11
5. Où tout redevient noethérien; filtrations q -adiques	15
6. Modules différentiels filtrés	20
B) Polynômes de Hilbert-Samuel	26
1. Rappel sur les polynômes à valeurs entières	26
2. Fonctions additives sur les catégories de modules	27
3. Le polynôme caractéristique de Hilbert	29
4. Les invariants de Hilbert-Samuel	32

Chapitre III. THÉORIE DE LA DIMENSION

A) Dimension des extensions entières	38
1. Définitions	38
2. Le premier théorème de Cohen-Seidenberg	39
3. Le second théorème de Cohen-Seidenberg	41
B) Dimension dans les anneaux noethériens	43
1. Dimension d'un module	43
2. Le cas semi-local noethérien	44
3. Systèmes de paramètres	47
C) Anneaux normaux	48
1. Caractérisation des anneaux normaux	48
2. Propriétés des anneaux normaux	51
3. Fermeture intégrale	53
D) Anneaux de polynômes	54
1. Dimension de l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$	54
2. Le lemme de normalisation	57
3. Applications. I. Dimension dans les algèbres de polynômes	59
4. Applications. II. Fermeture intégrale d'une algèbre de type fini	62
5. Applications. III. Dimension d'une intersection dans l'espace affine	64

Chapitre IV. DIMENSION ET CODIMENSION HOMOLOGIQUES

A) Le complexe de l'algèbre extérieure (Koszul)	67
1. Le cas simple	67
2. Acyclicité et propriétés fonctorielles du complexe de l'algèbre extérieure	69
3. La suite spectrale associée au complexe de l'algèbre extérieure	74
4. La codimension homologique d'un module sur un anneau semi-local	78

VI

- B) Modules de Cohen-Macaulay 83
 - 1. Définition des modules de Cohen-Macaulay 83
 - 2. Diverses caractérisations des modules de Cohen-Macaulay. 85
 - 3. Variété d'un module de Cohen-Macaulay. 88
 - 4. Idéaux premiers et complétion. 91
- C) Dimension homologique des modules noethériens. 93
 - 1. La dimension homologique d'un module 93
 - 2. Le cas noethérien. 95
 - 3. Le cas local 99
- D) Les anneaux réguliers. 101
 - 1. Propriétés et caractérisations des anneaux locaux réguliers. 101
 - 2. Propriétés de permanence des anneaux locaux réguliers. 106
 - 3. Délocalisation 108
 - 4. Un critère de normalité. 110

Appendice I. RÉSOLUTIONS MINIMALES. 112

- 1. Définition des résolutions minimales. 112
- 2. Application. 114
- 3. Cas du complexe de l'algèbre extérieure. 116

Appendice II. POSITIVITÉ DES CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ SUPÉRIEURES. 119

Chapitre V. LES MULTIPLICITÉS

- A) La multiplicité d'un module 124
 - 1. Le groupe des cycles d'un anneau 124
 - 2. La multiplicité d'un module. 125
- B) La multiplicité d'intersection de deux modules. 127
 - 1. La réduction à la diagonale. 127
 - 2. Produits tensoriels complétés. 129
 - 3. Anneaux réguliers d'égale caractéristique. 135
 - 4. Conjectures. 137
 - 5. Anneaux réguliers d'inégale caractéristique (cas non ramifié) 138
 - 6. Anneaux réguliers quelconques. 141
- C) Raccord avec la géométrie algébrique. 144
 - 1. Formule des Tor. 144
 - 2. Cycles sur une variété affine non singulière 145
 - 3. Premières formules 146
 - 4. Démonstration du théorème 1. 149
 - 5. Rationalité des intersections. 149
 - 6. Images directes. 150
 - 7. Images réciproques 151
 - 8. Extensions de la théorie des intersections 154

Bibliographie 157