

# Lecture Notes in Mathematics

Edited by A. Dold and B. Eckmann

11

---

Jean-Pierre Serre

## Algèbre Locale Multiplicités

Cours au Collège de France, 1957–1958  
rédigé par Pierre Gabriel  
Troisième édition

---



Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

**Author**

Jean-Pierre Serre  
Collège de France  
Chaire d'Algèbre et Géométrie  
11, place Marcelin Berthelot  
F-75231 Paris Cedex 05

3rd Edition 1975

2nd Corrected Printing 1997

Mathematics Subject Classifications (1970): 13-02, 13C15, 13D05, 13H05,  
13H10, 13H15, 14O15

ISBN 3-540-07028-1 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 0-387-07028-1 Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg

**Library of Congress Cataloging in Publication Data**

Serre, Jean-Pierre.

Algèbre locale, multiplicités.

(Lecture notes in mathematics ; 11)

Bibliography: p.

1. Geometry, Algebraic. 2. Rings (Algebra)

3. Modules (Algebra) I. Title. II. Series:

Lecture notes in mathematics (Berlin) ; 11.

QA3.L28 no. 11, 1975 [QA564] 510'.8s [516'.35] 75-359

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, re-use of illustrations, recitation, broadcasting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is only permitted under the provisions of the German Copyright Law of September 9, 1965, in its version of June 24, 1985, and a copyright fee must always be paid. Violations fall under the prosecution act of the German Copyright Law.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1975

Printed in Germany

Printing and binding: AZ Druck und Datentechnik GmbH, Kempten

2146/3140-5432

SPIN 11361473

TABLE DES MATIÈRES

Introduction

Chapitre I. IDÉAUX PREMIERS ET LOCALISATION

1. Notations et définitions . . . . .	1
2. Lemme de Nakayama . . . . .	1
3. Localisation . . . . .	2
4. Anneaux et modules noethériens . . . . .	2
5. Spectre . . . . .	3
6. Le cas noethérien . . . . .	4
7. Idéaux premiers associés . . . . .	4

Chapitre II. OUTILS ET SORITES

A) Filtrations et graduations . . . . .	8
1. Anneaux et modules filtrés . . . . .	8
2. Topologie définie par une filtration . . . . .	9
3. Complétion des modules filtrés . . . . .	10
4. Anneaux et modules gradués . . . . .	11
5. Où tout redevient noethérien; filtrations $q$ -adiques . . . . .	15
6. Modules différentiels filtrés . . . . .	20
B) Polynômes de Hilbert-Samuel . . . . .	26
1. Rappel sur les polynômes à valeurs entières . . . . .	26
2. Fonctions additives sur les catégories de modules . . . . .	27
3. Le polynôme caractéristique de Hilbert . . . . .	29
4. Les invariants de Hilbert-Samuel . . . . .	32

Chapitre III. THÉORIE DE LA DIMENSION

A) Dimension des extensions entières . . . . .	38
1. Définitions . . . . .	38
2. Le premier théorème de Cohen-Seidenberg . . . . .	39
3. Le second théorème de Cohen-Seidenberg . . . . .	41
B) Dimension dans les anneaux noethériens . . . . .	43
1. Dimension d'un module . . . . .	43
2. Le cas semi-local noethérien . . . . .	44
3. Systèmes de paramètres . . . . .	47
C) Anneaux normaux . . . . .	48
1. Caractérisation des anneaux normaux . . . . .	48
2. Propriétés des anneaux normaux . . . . .	51
3. Fermeture intégrale . . . . .	53
D) Anneaux de polynômes . . . . .	54
1. Dimension de l'anneau $A[X_1, \dots, X_n]$ . . . . .	54
2. Le lemme de normalisation . . . . .	57
3. Applications. I. Dimension dans les algèbres de polynômes . . . . .	59
4. Applications. II. Fermeture intégrale d'une algèbre de type fini . . . . .	62
5. Applications. III. Dimension d'une intersection dans l'espace affine . . . . .	64

Chapitre IV. DIMENSION ET CODIMENSION HOMOLOGIQUES

A) Le complexe de l'algèbre extérieure (Koszul) . . . . .	67
1. Le cas simple . . . . .	67
2. Acyclicité et propriétés fonctorielles du complexe de l'algèbre extérieure . . . . .	69
3. La suite spectrale associée au complexe de l'algèbre extérieure . . . . .	74
4. La codimension homologique d'un module sur un anneau semi-local . . . . .	78

VI

B) Modules de Cohen-Macaulay . . . . . 83

- 1. Définition des modules de Cohen-Macaulay . . . . . 83
- 2. Diverses caractérisations des modules de Cohen-Macaulay. . . . . 85
- 3. Variété d'un module de Cohen-Macaulay. . . . . 88
- 4. Idéaux premiers et complétion. . . . . 91

C) Dimension homologique des modules noethériens. . . . . 93

- 1. La dimension homologique d'un module . . . . . 93
- 2. Le cas noethérien. . . . . 95
- 3. Le cas local . . . . . 99

D) Les anneaux réguliers. . . . . 101

- 1. Propriétés et caractérisations des anneaux locaux réguliers. . . . . 101
- 2. Propriétés de permanence des anneaux locaux réguliers. . . . . 106
- 3. Délocalisation . . . . . 108
- 4. Un critère de normalité. . . . . 110

Appendice I. RÉSOLUTIONS MINIMALES. . . . . 112

- 1. Définition des résolutions minimales. . . . . 112
- 2. Application. . . . . 114
- 3. Cas du complexe de l'algèbre extérieurement. . . . . 116

Appendice II. POSITIVITÉ DES CARACTÉRISTIQUES D'EULER-POINCARÉ SUPÉRIEURES. . . . . 119

Chapitre V. LES MULTIPLICITÉS

A) La multiplicité d'un module . . . . . 124

- 1. Le groupe des cycles d'un anneau . . . . . 124
- 2. La multiplicité d'un module. . . . . 125

B) La multiplicité d'intersection de deux modules. . . . . 127

- 1. La réduction à la diagonale. . . . . 127
- 2. Produits tensoriels complétés. . . . . 129
- 3. Anneaux réguliers d'égale caractéristique. . . . . 135
- 4. Conjectures. . . . . 137
- 5. Anneaux réguliers d'inégale caractéristique (cas non ramifié) . . . . . 138
- 6. Anneaux réguliers quelconques. . . . . 141

C) Raccord avec la géométrie algébrique. . . . . 144

- 1. Formule des Tor. . . . . 144
- 2. Cycles sur une variété affine non singulière . . . . . 145
- 3. Premières formules . . . . . 146
- 4. Démonstration du théorème 1. . . . . 149
- 5. Rationalité des intersections. . . . . 149
- 6. Images directes. . . . . 150
- 7. Images réciproques . . . . . 151
- 8. Extensions de la théorie des intersections . . . . . 154

Bibliographie . . . . . 157